数学分析习题集 (I)

单变量函数的连续性、微分与积分

整理自作者北京大学数学分析习题课教案

PREFACE

This is Preface.

CONTENTS

Part I

数列与函数极限

CHAPTER 1

数列、级数与函数

本章节包括数列极限、级数、单变量函数等相关问题.

1 数列极限

问题 1.1

1. 假设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 分别满足 $a_n = o(n)$ 和 $b_n = o(n)$ 当 $n \to \infty$. 那么数列
$$c_n := \max_{0\le k\le n} (a_k + b_{n-k})$$
是否一定满足 $c_n = o(n)$ 当 $n \to \infty$?

2. 设 $m \in \mathbb{Z}_+$. 对 $i = 1, \ldots, m$, 假设数列 $\{x_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{i,n}}{n} = x_i \in \mathbb{R}$. 定义数列
$$y_n := \max_{\substack{n_1+\cdots+n_m=n\\ n_i\in\mathbb{N}}} (x_{1,n_1} + \cdots + x_{m,n_m}).$$
问 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{n}$ 是否一定存在? 如果存在, 是否可以用 $x_1, \ldots, x_m$ 来表示该极限?

问题的解答.

解答.

练习 1.2

上述问题是否可以推广到无穷多个数列的情形?

问题 1.3: Toeplitz 定理

设 $n, k \in \mathbb{N}_+$ 时, $t_{nk} \ge 0$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, 令
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k,$$
则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

问题的解答.

由 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$, 可不妨设 $a = 0$, 否则考虑数列 $\{a_n - a\}$. 此时对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N_1 \in \mathbb{N}_+$, 使 $n > N_1$ 时有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 另由 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$, 取 $N_2 \in \mathbb{N}_+$, 使 $n > N_2$ 时有 (不妨设 $a_1 \neq 0$)
$$0 \le t_{nk} < \frac{\varepsilon}{2\sum\limits_{l=1}^{N_1} |a_l|}, \quad k = 1, 2, \ldots, N_1.$$

此时当 $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$\begin{aligned}|x_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{N_1} t_{nk}|a_k| + \sum_{k=N_1+1}^{n} t_{nk}|a_k| \\ &< \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\varepsilon}{2\sum\limits_{l=1}^{N_1}|a_l|} \cdot |a_k| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N_1+1}^{n} t_{nk} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

练习 1.4

1. 利用 Toeplitz 定理证明 $\frac{*}{\infty}$ 型 Stolz 定理: 设 $\{b_n\}$ 是严格递增于 $+\infty$ 的数列, 如果数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \in \mathbb{R},$$

   那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

2. Toeplitz 定理中如果 $a = +\infty$ (或 $-\infty$), 结论是否依然成立?
3. 若将 "$\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$" 改为 "$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$", 结论是否依然成立?
4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_{n-k+1} = xy$.

问题 1.5

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 其中

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right).$$

问题的解答.

由于

$$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}},$$

我们有

$$\frac{k}{n^2} \geq \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \geq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\geq x_n\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{n+1}{4n}\geq x_n\geq\frac{1}{2n}\cdot\frac{n+1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

由夹逼原理即得: $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{4}$. ■

问题 1.6

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

问题的解答.

由 $\lim_{k\to\infty}(x_{2k}-x_{2k-2})=0$ 得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{2k}-x_2}{k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=2}^{k}(x_{2k}-x_{2k-2})}{k-1}=0.$$

从而 $\lim_{k\to\infty}\frac{x_{2k}}{2k}=0$. 同理由 $\lim_{k\to\infty}(x_{2k+1}-x_{2k-1})=0$ 可得 $\lim_{k\to\infty}\frac{x_{2k-1}}{2k-1}=0$. 故 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$, 即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

■

练习 1.7

1. 试利用 Cauchy 收敛准则与 $\varepsilon-N$ 语言证明本题结论.
2. 设 p 为一正整数. 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=d\in\mathbb{R}$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

3. 设 p 为一正整数. 若数列 $\{x_n\}$ 满足

$$-\infty<\liminf_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)\leq\limsup_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)<+\infty,$$

则是否一定有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0?$$

问题 1.8

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\{p_n\}$ 为一个严格递增到正无穷的正数数列. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{p_n} = 0.$$

问题的解答.

由 Abel 分部求和公式:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(p_k - p_{k-1}) + A_n p_n,$$

其中 $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 即有

$$\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n} p_k a_k = A_n - \frac{\sum A_k(p_{k+1} - p_k)}{p_n}.$$

记 $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 则由 Stolz 定理得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum A_k(p_{k+1} - p_k)}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-1}(p_n - p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}} = A.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{p_n} = A - A = 0.$$

■

练习 1.9

试证明若题设中 “严格递增” 改为 “递增”(即不减), 结论依然成立.

问题 1.10

设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 求

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k^{\alpha}}.$$

问题的解答.

记

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k^{\alpha}}.$$

对 α 不同的取值分类讨论:

1. $\alpha < 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + n^{\alpha}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k^{\alpha}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + 1},$$

即

$$\frac{n}{n + n^{\alpha}} \le S_n \le \frac{n}{n + 1},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

2. $\alpha = 1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2.$$

3. $\alpha > 1$ 时, 取 β 满足 $1 < \beta < \alpha$, 则

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k^\alpha} &= \sum_{k=1}^{[\sqrt[\beta]{n}]} \frac{1}{n+k^\alpha} + \sum_{k=[\sqrt[\beta]{n}]+1}^{n} \frac{1}{n+k^\alpha} \\ &\le \frac{[\sqrt[\beta]{n}]}{n} + \frac{n-\sqrt[\beta]{n}}{n^{\alpha/\beta}} \\ &\le \frac{1}{n^{1-1/\beta}} + \frac{1}{n^{\alpha/\beta-1}} \to 0 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

■

问题 1.11

数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = a_n(1-a_n),\ n \ge 1.$$

证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$;

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1-na_n)}{\ln n} = 1.$$

问题的解答.

(1) 简单的归纳可证: $1 < a_{n+1} < a_n < 1$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 记极限为 a. 则 $a = a(1-a)$, 即 $a = 0$.

另一方面, 由 $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, 得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1-a_n}.$$

从而由 Stolz 定理得

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1/a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/(1-a_n)} = \lim_{n\to\infty} (1-a_n) = 1.$$

(2) 由于

$$\frac{n(1-na_n)}{\ln n} = na_n \cdot \frac{\frac{1}{a_n} - 1}{\ln n},$$

由 (1) 我们只需证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n} - 1}{\ln n} = 1.$$

且由 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_n}-1}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}-1}{\ln(n+1)-\ln n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1-a_n}-1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n}{1-a_n}}{1/n}=\lim_{n\to\infty}na_n=1.$$

练习 1.12

1. 实际上由本题结论可知
$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),\quad (n\to\infty).$$
试对此表达式余项进行更精细的估计.

2. 试对数列 $\{x_n\}$ 建立类似如上的结论并证明, 其中数列 $\{x_n\}$ 定义为:
$$x_1>0,\quad x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n},\quad n\geq 1.$$

问题 1.13: Tannery 定理

设数列 $\{a_n^{(k)}\}_{k,n\in\mathbb{N}_+}$ 满足:

- 每个级数 $S_k=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{(k)}$ 收敛;
- 对任意固定 $n\in\mathbb{N}_+$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_n^{(k)}=a_n$;
- 存在正项收敛级数 $T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 并且对任意 $n,k\in\mathbb{N}_+$, 有 $|a_n^{(k)}|\leq A_n$.

那么级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 并且 $S=\lim\limits_{k\to\infty}S_k$.

问题的解答.

首先, 由 $\lim\limits_{k\to\infty}a_n^{(k)}=a_n$ 及 $|a_n^{(k)}|\leq a_n$ 可知 $|a_n|\leq A_n$, 因此级数 S 绝对收敛 (实际上每个 S_k 显然也绝对收敛).

任取 $\varepsilon>0$, 则存在 $N\in\mathbb{N}_+$, 有 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}A_n\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$. 此时

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall k>0.$$

另一方面, 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}a_n^{(k)}=a_n$, 我们可以找到某个 K (依赖于 N), 使得

$$|a_n-a_n^{(k)}|\leq\frac{K}{3N},\quad \forall 1\leq n\leq N.$$

因此, 当 $k > K$ 时,

$$\begin{aligned} |S - S_k| &= \left| \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_n^{(k)}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^{(k)} \right| \\ &\le \sum_{n=1}^{N} |a_n - a_n^{(k)}| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n^{(k)}| \\ &< N \cdot \frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

综上 $\lim_{k\to\infty} S_k = S$. ■

练习 1.14

1. 求极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$, 其中

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n.$$

(提示: 令

$$a_p^{(q)} = \begin{cases} \left(\dfrac{q-p}{q}\right)^q, & 1 \le p \le q \\ 0, & p > q \end{cases}$$

再使用 Tannery 定理)

2. 考虑建立上述数列 S_n 的更精细的渐进性质.

问题 1.15

定义数列

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) a_n - 1.$$

证明: 存在唯一实数 x 使得数列 $\{a_n\}$ 收敛.

问题的解答.

记幂级数

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n.$$

则由递推公式, 得

$$\begin{aligned} \phi'(z) - x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(2 + \frac{1}{n}\right) a_n - 1\right) z^n \\ &= 2z\phi'(z) + \phi(z) - \frac{z}{1-z}. \end{aligned}$$

从而

$$\left(\sqrt{1-2z}\,\phi(z)\right)' = \sqrt{1-2z}\,\phi'(z) - \frac{1}{\sqrt{1-2z}}\phi(z) = \frac{x}{\sqrt{1-2z}} - \frac{z}{(1-z)\sqrt{1-2z}}.$$

故

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-2z}}\int_0^z \frac{x-(x+1)t}{(1-t)\sqrt{1-2t}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2z}}\cdot\left(2\arctan\sqrt{1-2t}-(x+1)\sqrt{1-2t}\right)\Big|_0^z \\ &= \frac{2\arctan\sqrt{1-2z}-\dfrac{\pi}{2}+(x+1)}{\sqrt{1-2z}}-(x+1).\end{aligned}$$

若 $\{a_n\}$ 收敛, 可知 $\phi(z)$ 收敛半径应为 1. 但由上式知, 这必须导致

$$\left(2\arctan\sqrt{1-2z}-\frac{\pi}{2}+(x+1)\right)\Big|_{z=1/2}=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-1.$$

此时

$$\begin{aligned}\phi(z) &= 2\frac{\arctan\sqrt{1-2z}}{\sqrt{1-2z}}-\frac{\pi}{2} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z-1)^n}{2n+1}-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

令

$$\Phi(y)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z-1)^n}{2n+1}\cdot y^{2n+1}-\frac{\pi}{2},\quad y\in[-1,1].$$

则 $\Phi(0)=-\dfrac{\pi}{2}$, $\Phi(1)=\phi(z)$, 且

$$\Phi'(y)=2\sum_{n=0}^{\infty}(2z-1)^n y^{2n}=\frac{2}{1-(2z-1)y^2}=\frac{2}{1+y^2-2y^2z}.$$

故

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= -\frac{\pi}{2}+2\int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2-2y^2z} \\ &= -\frac{\pi}{2}+2\int_0^y \frac{1}{1+y^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2y^2}{1+y^2}\right)^n z^n\mathrm{d}y \\ &= -\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\int_0^y \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{2y^2}{1+y^2}\right)^n\mathrm{d}y\right)z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^y \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{2y^2}{1+y^2}\right)^n\mathrm{d}y\right)z^n.\end{aligned}$$

从而

$$a_n=2n\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{2y^2}{1+y^2}\right)^n\mathrm{d}y.$$

注意到对任意 $f,g\in C[0,1]$, 且 $f([0,1))\subset[0,1)$, $f(1)=1$, 有

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)g(t)^n\mathrm{d}t=f(1).$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

综上, 当且仅当 $x=\dfrac{\pi}{2}-1$ 时数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且此时 a_n 极限为 1. ■

练习 1.16

1. 试证明恒等式
$$\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{k}\frac{a_j}{a_{j+1}+1}=(1+a_1)\cdot\left(\frac{a_1}{1+a_1}-\frac{a_1\cdots a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\right),$$
并由此来解决上面的问题.

2. 若 a_0, a_1 为实数, 且数列 $\{a_n\}$ 满足
$$a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1},$$
证明数列 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛并求其极限.

2 级数

问题 2.1

证明: 如果对任意趋于 0 的数列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nx_n$ 都收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必绝对收敛.

问题的解答.

这里是解答.

练习 2.2

幂级数收敛半径等价性 (私货).

问题 2.3

讨论级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}\quad (p>0)$$
的敛散性.

问题的解答.

1. $p>1$ 时, 显然该级数绝对收敛.

2. $0<p\le 1$: 注意到对任意正整数 k,
$$[\sqrt{n}]=k \Leftrightarrow k\le\sqrt{n}<k+1 \Leftrightarrow k^2\le n\le k^2+2k.$$
记
$$a_k=\sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{(k^2+j)^p}.$$

则
$$\left((k+1)^2-k^2\right)\cdot\frac{1}{(k^2+2k)^p}\le a_k\le\left((k+1)^2-k^2\right)\cdot\frac{1}{k^{2p}},$$
即 $a_k\sim 2k^{1-p}$. 若原级数收敛, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$, 从而 $p>\dfrac{1}{2}$.

若 $p>\dfrac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$, 知原级数收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ 收敛. 此时有 Leibniz 判别法, 只需证明 $\{a_k\}$ 递减 (k 充分大时), 则有原级数收敛. 事实上:

$$\begin{aligned}
a_k-a_{k-1}&=\sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{(k^2+j)^p}-\sum_{j=0}^{2(k+1)}\frac{1}{\left((k+1)^2+j\right)^p}\\
&=\sum_{j=0}^{2k}\left(\frac{1}{(k^2+j)^p}-\frac{1}{\left((k+1)^2+j\right)^p}\right)-\frac{1}{\left((k+2)^2-2\right)^p}-\frac{1}{\left((k+2)^2-1\right)^p}\\
&\ge(2k+1)\cdot\left(\frac{1}{(k^2+2k)^p}-\frac{1}{\left((k+1)^2+2k\right)^p}\right)-\frac{2}{(k+1)^{2p}}\\
&\ge\frac{2}{k^{2p}}\cdot\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(1+\frac{2}{k}\right)^{-p}-\left(1+\frac{4}{k}+\frac{1}{k^2}\right)^{-p}\right)-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-2p}\right)\\
&\sim\frac{2}{k^{2p}}\cdot(2p-1)>0\quad(k\text{ 充分大}).
\end{aligned}$$

其中第三行的不等式用到了函数
$$f(x)=\frac{1}{(k^2+x)^p}-\frac{1}{\left((k+1)^2+x\right)^p}$$
在区间 $[0,2k]$ 上的递减性 (可由 $y=t^{-p}$ 凹凸性直接给出). 从而 $p>\dfrac{1}{2}$ 时原级数收敛.

■

问题 2.4

讨论下列级数的敛散性:

$$(1)\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(y\ln n)}{n^x},\qquad(2)\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(y\ln n)}{n^x}.$$

问题的解答.

1. $x>1$ 时, 显然该级数绝对收敛. 下证 $x\le 1$ 时, 该级数均发散. $y=0$ 时显然成立. 以下不妨设 $y>0$.

固定 $k\in\mathbb{N}_+$, 考虑 n 使
$$2k\pi-\frac{\pi}{3}\le y\ln n\le 2k\pi+\frac{\pi}{3}.$$
即
$$\exp\left(\frac{2k\pi}{y}-\frac{\pi}{3y}\right)\le n\le\exp\left(\frac{2k\pi}{y}+\frac{\pi}{3y}\right).\tag{1.1}$$
对满足 (1.1) 式的正整数 n, 有 $\cos(y\ln n)\ge\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$. 记
$$N_k:=\left[\exp\left(\frac{2k\pi}{y}-\frac{\pi}{3y}\right)\right],\quad N_k+\sigma_k:=\left[\exp\left(\frac{2k\pi}{y}+\frac{\pi}{3y}\right)\right].$$

则由于 $x \le 1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=N_k+1}^{N_k+\sigma_k}\frac{\cos\left(y\ln j\right)}{j^x} &\ge \frac{1}{2}\cdot\sigma_k\cdot\frac{1}{N_k+\sigma_k}\\ &\ge \frac{\exp\left(\frac{2k\pi}{y}+\frac{\pi}{3y}\right)-\exp\left(\frac{2k\pi}{y}-\frac{\pi}{3y}\right)-1}{2\cdot\exp\left(\frac{2k\pi}{y}+\frac{\pi}{3y}\right)}\\ &\to \frac{1}{2}\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi}{3y}\right)\right)>0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

此时由 (1.2) 式及 Cauchy 收敛准则知 $x \le 1$ 时原级数发散.

2. 若该级数收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos(y\ln n)}{n^x}=0$, 从而必有 $x>0$. 下证 $x>0$ 时, 该级数均收敛.

   此时 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos(y\ln n)}{n^x}=0$, 故只需证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\left(y\ln(2k-1)\right)}{(2k-1)^x}-\frac{\cos\left(y\ln(2k)\right)}{(2k)^x}\right)$$

   收敛. 其中:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\cos(y\ln n)}{n^x}-\frac{\cos\left(y\ln(n+1)\right)}{(n+1)^x}\right|\\ =&\left|\frac{n^x\Big(\cos(y\ln n)-\cos\left(y\ln(n+1)\right)\Big)+\left((n+1)^x-n^x\right)\cos(y\ln n)}{n^x(n+1)^x}\right|\\ \le&\frac{1}{(n+1)^x}\left|2\sin\frac{y\ln n+y\ln(n+1)}{2}\sin\frac{y\ln n-y\ln(n+1)}{2}\right|+\frac{(n+1)^x-n^x}{n^x(n+1)^x}\\ \le&\frac{2}{(n+1)^x}\left|\sin\frac{y\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}\right|+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x-1}{(n+1)^x}\\ \sim&\frac{(x+|y|)}{n^{1+x}}.\end{aligned}$$

   由 $x>0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+x}}<+\infty$, 知原级数收敛.

■

练习 2.5

讨论如下级数的敛散性:

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(y\ln n)}{n^x},\qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(y\ln n)}{n^x}.$$

并由此得到下列复级数在 $\mathbb{C}$ 上的收敛区域:

$$(1)\quad \zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\qquad (2)\quad \eta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s}.$$

问题 2.6

计算极限:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta(n+1)-1}{\zeta(n)-1}.$$

问题的解答.

这里是解答.

问题 2.7

设 $\{a_n\}$, $\{\varphi_n\}$ 为正数列, $\varphi_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, $n\to\infty$. 证明: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty$.

问题的解答.

假设 $K>0$ 使
$$\varphi_n \le K\frac{1}{\ln n},\quad n\ge 2.$$
记
$$S := \left\{n\colon a_n \le \frac{1}{n^2}\right\},\quad T := \mathbb{N}_+ \setminus S.$$
对充分大的 $n\in S$, 有 (注意到 n 充分时 $a_n<1$ 及 $e^K/n<1$)
$$a_n^{1-\varphi_n} \le a_n^{1-\frac{K}{\ln n}} = a_n^{\frac{\ln\left(n/e^K\right)}{\ln n}} = \left(\frac{e^K}{n}\right)^{\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}} \le \frac{e^{2K}}{n^2}.$$
另一方面, 对充分大的 $n\in T$, 有
$$\frac{a_n^{1-\varphi_n}}{a_n} \le a_n^{-\frac{K}{\ln n}} = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{K}{\ln n}} \le n^{2K/\ln n} = e^{2K}.$$
故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \sum_{n\in S} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty,$$
以及
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n\in T} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty.$$
从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty$.

问题 2.8

设无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 且对任意正整数 k 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} = 0.$$

证明: 对任意正整数 n, $a_n = 0$.

问题的解答.

这里是解答.

问题 2.9

正数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$0 < a_n \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

证明: 对任意 $x \in (0,1)$, 存在一个 $\mathbb{N}_+$ 的子列 (k_p), 使 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_p}$.

问题的解答.

这里是解答.

3 数列及级数不等式

问题 3.1: Hardy-Landau 不等式

设 $\{a_n\}$ 为非负数列, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 对任意 $p > 1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^{1/p} + \cdots + a_n^{1/p}}{n} \right)^p \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

问题的解答.

记

$$A_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{1/p}.$$

由 Young 不等式:

$$ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad (a, b \ge 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1),$$

有

$$A_n^{p-1} A_{n-1} \le \frac{(p-1)A_n^p + A_{n-1}^p}{p},$$

从而

$$\begin{aligned}A_n^p-\frac{p}{p-1}A_n^{p-1}a_n^{1/p}&=A_n^p-\frac{p}{p-1}\big(nA_n-(n-1)A_{n-1}\big)A_n^{p-1}\\&=A_n^p\big(1-\frac{np}{p-1}\big)+\frac{(n-1)p}{p-1}A_n^{p-1}A_{n-1}\\&\le A_n^p\big(1-\frac{np}{p-1}\big)+\frac{n-1}{p-1}\big((p-1)A_n^p+A_{n-1}^p\big)\\&=\frac{1}{p-1}\big((n-1)A_{n-1}^p-nA_n^p\big),\end{aligned}$$

即得

$$\sum_{n=1}^N A_n^p-\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^N A_n^{p-1}a_n^{1/p}=-\frac{n}{p-1}A_n^p\le 0.$$

再由 Hölder 不等式, 有

$$\sum_{n=1}^N A_n^p\le\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^N A_n^{p-1}a_n^{1/p}\le\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^N(A_n^{p-1})^q\right)^{1/q}\left(\sum_{n=1}^N a_n\right)^{1/p},$$

即

$$\left(\sum_{n=1}^N A_n^p\right)^{1-1/q}\le\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^N a_n\right)^{1/p},$$

进而有

$$\sum_{n=1}^N A_n^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^N a_n\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^\infty a_n.$$

令 $N\to\infty$ 即得证. ■

练习 3.2

1. 上述定理中的系数 $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ 是否是最优系数?
2. 试证明 Hardy-Landau 不等式对任意 $p<0$ 亦成立.

问题 3.3: Carleman 不等式

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^\infty\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le e\sum_{n=1}^\infty a_n.$$

问题的解答.

由 Hardy-Landau 不等式, 对任意 $p>1$, $N\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\sum_{n=1}^N\left(\frac{a_1^{1/p}+\cdots+a_n^{1/p}}{n}\right)^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^\infty a_n,$$

从而令 $p \to +\infty$, 上述不等式依然成立, 即有

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

令 $N \to \infty$ 即得证. ■

练习 3.4

1. 上述系数 e 是否为最优系数?
2. 证明如下 Carleman 不等式的加强形式: 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则对任意 $k \in \mathbb{N}_+$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le k^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n+k}{n}\right)^n.$$

4 发散级数

5 数论函数与无穷级数、无穷乘积

问题 5.1

证明: 对任意 $a > 1$, 有

$$\sum_{\substack{p,q \in \mathbb{N}_+ \\ (p,q)=1}} (a^{p+q} - 1)^{-1} = (a-1)^{-2}.$$

问题的解答.

由于对任意 $x > 1$,

$$(x-1)^{-1} = \frac{x^{-1}}{1 - x^{-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{-k},$$

我们有

$$(a^{p+q} - 1)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} a^{-k(p+q)},$$

而

$$(a-1)^{-2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a^{-i}\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a^{-(i+j)}.$$

注意到, 对任意 $i, j \in \mathbb{N}_+$, 集合

$$\{k(p+q) : p, q, k \in \mathbb{N}_+, (p,q) = 1\}$$

与

$$\{i + j : i, j \in \mathbb{N}_+\}$$

有一一对应, 实际上即由

$$i + j = (i,j)\left(\frac{i}{(i,j)} + \frac{j}{(i,j)}\right)$$

给出. 从而

$$\sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N}_+\\(p,q)=1}}(a^{p+q}-1)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N}_+\\(p,q)=1}}a^{-k(p+q)}=\sum_{i,j=1}^{\infty}a^{-(i+j)}=(a-1)^2.$$

其中涉及所有级数均绝对收敛, 可任意调换顺序. ■

问题 5.2

设 $\{a_n\}$ 为非负数列, $a_1=1$, 且

$$a_{mn}=a_m a_n,\quad \forall m,n\in\mathbb{N}_+.$$

证明: 对任意实数 s, 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^s}$ 收敛当且仅当无穷乘积 $\prod\limits_{p}\left(1-a_p p^{-s}\right)^{-1}$ (p 从小到大依次取遍所有正素数) 收敛, 且收敛时有

$$\prod_{p}\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}.$$

问题的解答.

这里是解答. ■

练习 5.3

1. 试由此题结论证明素数有无穷多个, 并且

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p}\sim\ln\ln x,\quad x\to+\infty.$$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,

$$a_{mn}=a_m a_n,\quad m,n\in\mathbb{N}_+,\ (m,n)=1,$$

以及

$$a_{p^r}=a_p a_{p^{r-1}}-\chi(p)p^{k-1}a_{p^{r-2}},\quad p\text{ 为素数},\ r\in\mathbb{Z}_{\geq 2},$$

其中 χ 为 $\mathbb{N}_+\to\mathbb{C}$ 函数, k 为正的常数. 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=\prod_{p}\left(1-a_p\cdot p^{-s}+\chi(p)p^{k-1}\cdot p^{-2s}\right)^{-1},$$

若假设 s 的选取使左边级数绝对收敛.

问题 5.4

对 $n \in \mathbb{N}$, 令 $p(n)$ 为将 n 表示为一些正整数之和的方式的数量 ($p(0) = 1$), 即**分拆数**. 记

$$p(q) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \quad (|q| < 1).$$

证明:

$$p(q) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^m}.$$

问题的解答.

这里是解答.

练习 5.5

1. 若记 $\Delta(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}$, 证明:

$$\Delta(q) \equiv q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{25n}) p(q) \mod 5;$$

2. 根据模形式理论相关结果, 若将 $\Delta(q)$ 写为 $\Delta(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$, 则有 $a_{5n} \equiv 0 \mod 5$. 由此证明: $p(5n+4) \equiv 0 \mod 5$ (Ramanujan).

问题 5.6

1. 确定恒等式

$$\prod_{i=1}^{n} (1+q^{2i-1}x)(1+q^{2i-1}x^{-1}) = C_0 + \sum_{i=0}^{n} C_i(x^i + x^{-i})$$

中的系数 C_i.

2. 证明 (Jacobi 恒等式)

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1}x)(1+q^{2n-1}x^{-1})(1-q^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^n \quad (|q| < 1).$$

3. 证明:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n} \quad (|q| < 1).$$

问题的解答.

1. 易见欲证等式左边展开后确实会有右边此种形式. 一般来说我们会期望 C_0 可以很快算出来, 但我们

会发现 C_0 并不好求, 而实际上 C_n 是可以直接算出来的:

$$C_n = \prod_{i=1}^{n} q^{2i-1} = q^{n^2}.$$

另一方面, 将欲证等式左边记为 $\varphi_n(x)$, 则可见

$$\varphi_n(q^2x) = \varphi_n(x) \cdot \frac{(1+q^{2n+1}x)(1+q^{-1}x^{-1})}{(1+q^{2n-1}x^{-1})(1+qx)} = \varphi_n(x) \cdot \frac{1+q^{2n+1}x}{qx+q^{2n}}.$$

结合欲证等式右边形式可得 (系数对应相等)

$$C_i q^{2i+1} + q^{2n} C_{i+1} \cdot q^{2(i+1)} = C_{i+1} + q^{2n+1} C_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

即

$$C_i = C_n \prod_{j=i}^{n-1} \frac{1-q^{2n+2i+2}}{q^{2i+1}(1-q^{2(n-i)})} = q^{i^2} \prod_{j=1}^{n-i} \frac{1-q^{2(n+i+j)}}{1-q^{2j}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

2. 固定 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 显然无穷乘积

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+q^{2i-1}x)(1+q^{2i-1}x^{-1})$$

关于 q 在 $(-1, 1)$ 上内闭一致收敛. 即由第一题可得

$$\lim_{n\to\infty} \left(C_0 + \sum_{i=0}^{n} C_i (x^i + x^{-i}) \right) = \prod_{i=1}^{\infty} (1+q^{2i-1}x)(1+q^{2i-1}x^{-1}),$$

而上式左边由第一题算出的 C_i 的值可知也关于 q 是内闭一致收敛的极限. 从而我们可以取逐项极限. 易知

$$\lim_{n\to\infty} C_i = q^{i^2} \prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{2j})^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

综上,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1}x)(1+q^{2n-1}x^{-1}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^{-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (x^n + x^{-n}) \right).$$

即得证.

3. 在第二题中令 $x = -1$, 得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})^2 (1-q^{2n}) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1-q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2}{1-q^{2n}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n}.
\end{aligned}$$

■

练习 5.7

证明:

1. (Euler 五边形数定理)
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} \quad (|q|<1),$$
并由此得到上题中的分拆数满足如下递推关系式:
$$p(n)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^{k+1}p(n-\omega(k)),$$
其中 $\omega(k)=(3k^2+k)/2$.

问题 5.8

令 $|q|<1$, 证明:

1. $$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}};$$
2. $$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^6=\frac{1}{2}\sum_{r,s=-\infty}^{\infty}\left((2r+1)^2-(2s)^2\right)q^{r(r+1)+s^2};$$
3. $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^4=1-8\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n+1}}-2n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right);$$
4. $$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}\right)^4=1+8\sum_{n\geq 1,\ 4\nmid n}n\frac{q^n}{1-q^n};$$
5. 对任意正整数 n, 将 n 表示为 4 个整数的平方和的方法数
$$\mathrm{Card}\left\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{Z}^4:\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=n\right\}$$
为 (下面 d 为正整数)
$$8\sum_{4\nmid d,\ d\mid n}d.$$

问题的解答.

1. 在上题 Jacobi 恒等式中将 x 替换为 $-x^2q$, 再将 q^2 换为 q, 最后两边再同乘 x, 可得
$$(x-x^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nx^2)(1-q^nx^{-2})(1-q^n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nq^{\frac{n(n+1)}{2}}x^{2n+1}.$$

两边对 x 求导并再令 $x=1$ 得

$$2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

两边同除以 2 即得证.

2. 对第 1 小题中等式两边平方, 得

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^6&=\frac{1}{4}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(2m+1)(2n+1)q^{\frac{m(m+1)+n(n+1)}{2}}\\&=\frac{1}{4}\sum_{2\mid(m-n)}(2m+1)(2n+1)q^{\frac{m(m+1)+n(n+1)}{2}}+\frac{1}{4}\sum_{2\nmid(m-n)}(2m+1)(2n+1)q^{\frac{m(m+1)+n(n+1)}{2}}.\end{aligned}$$

做换元: 在和式第一项中令 $(m,n)=(r+s,r-s)$, 在和式第二项中令 $(m,n)=(s+r,s-r-1)$, 得

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^6=\frac{1}{2}\sum_{r,s=-\infty}^{\infty}\left((2r+1)^2-(2s)^2\right)q^{r(r+1)+s^2}.$$

3. 继续由第 2 小题中恒等式:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^6=\frac{1}{2}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty}q^{s^2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(2r+1)^2q^{r(r+1)}-\sum_{r=-\infty}^{\infty}q^{r(r+1)}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(2s)^2q^{s^2}\right). \tag{1.3}$$

由 Jacobi 恒等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n}),$$

两边求导, 有 (注意到 $f'=f(\log|f|)'$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2q^{n^2}=2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n})\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right).$$

同理由 Jacobi 恒等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2+n}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2(1-q^{2n}),$$

求导得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n^2+n)q^{n^2+n}=2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2(1-q^{2n})\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}2n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}-\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right).$$

带回 (1.3), 得

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^6&=\frac{1}{2}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty}q^{s^2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(2r+1)^2q^{r(r+1)}-\sum_{r=-\infty}^{\infty}q^{r(r+1)}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(2s)^2q^{s^2}\right)\\&=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2(1+q^{2n})^2(1-q^{2n})^2\\&\quad\cdot\left(1-8\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}-2n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)\right)\\&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1+q^n)^4\cdot\left(1-8\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}-2n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)\right).\end{aligned}$$

即得证.

4. 由上一问题的第 3 小题和本问题的第 3 小题, 有

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\right)^4 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^4$$
$$= 1-8\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} - 2n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right).$$

将 q 替换为 $-q$, 得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^4 &= 1+8\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} + 2n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)\\ &= 1+8\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{q^n}{1-q^n} - 8\sum_{n=1}^{\infty}2nq^{2n}\left(\frac{1}{1-q^{2n}}-\frac{1}{1+q^{2n}}\right)\\ &= 1+8\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{q^n}{1-q^n} - 8\sum_{n=1}^{\infty}4n\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}\\ &= 1+8\sum_{n\geq 1,\ 4\nmid n} n\frac{q^n}{1-q^n}.\end{aligned}$$

5. 将第 4 小题中右边逐项展开, 有

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^4 = 1+8\sum_{n\geq 1,\ 4\nmid n} n\sum_{k=1}^{\infty} q^{kn} = 1+8\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{4\nmid d,\ d\mid l} d\right)q^l$$

(这里做了 $d=n, l=kn$ 的代换). 而上式等式左边等于 $\sum_{n=1}^{\infty} r(4,n)q^n$, 其中 $r(4,n)$ 为将 n 表示为 4 个整数的平方和的方法数. 从而比较系数即得

$$r(4,n) = 8\sum_{4\nmid d,\ d\mid n} d, \quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

■

练习 5.9

证明: 对任意正整数 n, 将 n 表示为 8 个整数的平方和的方法数为

$$16\left(\sum_{d\mid n} d^3 - 2\sum_{2d\mid n} d^3 + 16\sum_{4d\mid n} d^3\right).$$

6 稠密性与一致分布

本节我们用 $\{x\} := x-[x]$ 来表示实数 x 的小数部分 ($[x]$ 为 x 整数部分). 因此为了避免混淆, 我们用 $(*_n)_{n\geq 1}$ 来表示数列.

问题 6.1

设正数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ 满足: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 记 S_n 为 (a_n) 的前 n 项和. 证明: $\left(\{S_n\}\right)_{n\geq 1}$ 在 $[0,1]$ 中稠密.

问题的解答.

我们只需证明对任意子开区间 $(p,q) \subseteq [0,1]$, 都必存在 n 使得 $\{S_n\}$ 位于 (p,q) 中.

取 $\varepsilon_0 \in (0, q-p)$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 知存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使 $n > N$ 时有 $0 < a_n < \varepsilon_0$. 记 $m \coloneqq [S_N]$. 若 $\{S_N\} \in (p,q)$ 中, 则得证. 否则不妨设 $\{S_N\} \in [0,p]$, 即 $S_N \in \left[m, m+p\right]$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, 知必存在 $k \in \mathbb{N}_+$ 使 $S_{N+k} > m+q$. 即

$$S_N \leq m+p < m+q < S_{N+k}.$$

假设不存在 $n \in \mathbb{N}_+, N < n < N+k$, 使

$$m+p < S_n < m+q.$$

则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+, N \leq n_0 < N+k$, 使

$$S_{n_0} \leq m+p, \quad S_{n_0+1} \geq m+q.$$

此时有

$$a_{n_0+1} = S_{n_0+1} - S_{n_0} \geq q-p > \varepsilon_0,$$

这与 $n_0+1 > N$ 矛盾! 证毕. ■

定义 6.2: 一致分布

称数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 为区间 $[0,1]$ 上的一致分布, 若对任意 $u, v \in [0,1]$, 有

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\operatorname{Card}\left\{n\colon 1 \leq n \leq N,\ u \leq \{x_n\} \leq v\right\}}{N} = v-u.$$

问题 6.3: Weyl 判别准则

证明: 数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 为 $[0,1]$ 上的一致分布当且仅当对任意连续的以 1 为周期的连续函数 f 有

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

并当且仅当对任意非零整数 k,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{2i\pi k x_n} = 0.$$

问题的解答.

这里是解答. ■

练习 6.4

证明对任意无理数 α, 数列 $(n\alpha)_{n\geq 1}$ 为 $[0,1]$ 上的一致分布.

问题 6.5

令 a, N 为正整数. 令 $u_1,\dots,u_N$ 为复数, L 为满足 $1\leq aL\leq N$ 的整数. 则我们有

$$L^2\left|\sum_{n=1}^{N}u_n\right|^2 \leq L\big(N+a(L-1)\big)\sum_{n=1}^{N}|u_n|^2 + 2\big(N+a(L-1)\big)\sum_{l=1}^{L-1}(L-l)\cdot \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N-al}u_n\bar{u}_{n+al}.$$

问题的解答.

这里是解答. ■

问题 6.6

令 $(x_n)_{n\geq 1}$ 为一实数列, a, b 为正实数. 如果对于每个正数 l, 数列 $(x_{n+al}-x_n)_{n\geq 1}$ 为 $[0,1]$ 上的一致分布, 则 $(x_{bn})_{n\geq 1}$ 为 $[0,1]$ 上的一致分布.

问题的解答.

这里是解答. ■

问题 6.7

令 $P(X)=a_dX^d+\cdots+a_1X+a_0$ 为次数 $d\geq 1$ 的实多项式. 若系数 $a_1,\dots,a_d$ 中至少有一个是无理数, 则数列 $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ 为 $[0,1]$ 上的一致分布.

问题的解答.

这里是解答. ■

本节之后的内容中: 对任意实数 r, 用 $\|r\|$ 表示 r 和最近的整数的距离: $\|r\| := \min\{|r-n| : n\in\mathbb{Z}\}$.

问题 6.8: (2023 年阿里巴巴数学竞赛预赛题)

1. 是否存在非零实数 s 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|(\sqrt{2}+1)^n s\|=0$?
2. 是否存在非零实数 s 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|(\sqrt{2}+3)^n s\|=0$?

问题的解答.

1. 存在. 事实上直接取 $s=1$ 即可. 下面给出证明. 注意到对任意正整数 k, 有

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{2}+1)^{2k}+(\sqrt{2}-1)^{2k} &= \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^{j}(\sqrt{2})^{j}(1+(-1)^{2k-j}) \\
&= \sum_{l=0}^{k} C_{2k}^{2l} 2^{2l+1} \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{2}+1)^{2k+1}-(\sqrt{2}-1)^{2k+1} &= \sum_{j=0}^{2k+1} C_{2k+1}^{j}(\sqrt{2})^{j}(1-(-1)^{2k+1-j}) \\
&= \sum_{l=0}^{k} C_{2k+1}^{2l} 2^{2l+1} \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

并且 $(\sqrt{2}-1)^n \in (0,1/2)$, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$. 从而我们有

$$
\|(\sqrt{2}+1)^n\| = (\sqrt{2}-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.
$$

故

$$
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|(\sqrt{2}+1)^n\| = 0.
$$

即 $s=1$ 满足题设所需.

2. 不存在. 下面给出证明. 记 $\alpha = 3+\sqrt{2}, \beta = 3-\sqrt{2}$. 假设存在 $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|s\alpha^n\| = 0$. 令 $f(x) = x^2-6x+7 \in \mathbb{Z}[x]$, 有 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. 记

$$
s\alpha^n = a_n + \varepsilon_n, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad |\varepsilon_n| \le \frac{1}{2}.
$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\|s\alpha^n\| = 0$ 可知存在正整数 n_0 使得, $n \ge n_0$ 时, 均有 $|\varepsilon_n| < 1/14$. 由 $f(\alpha) = 0$ 我们有

$$
s\alpha^n(\alpha^2-6\alpha+7) = 0.
$$

从而

$$
a_{n+2}+\varepsilon_{n+2}-6a_{n+1}-6\varepsilon_{n+1}+7a_n+7\varepsilon_n = 0.
$$

故当 $n \ge n_0$ 时,

$$
\begin{aligned}
|a_{n+2}-6a_{n+1}+7a_n| &= |\varepsilon_{n+2}-6\varepsilon_{n+1}+7\varepsilon_n| \\
&\le |\varepsilon_{n+2}|+6|\varepsilon_{n+1}|+7|\varepsilon_n| < 1.
\end{aligned}
$$

但是上述不等式左边是整数, 因此

$$
a_{n+2}-6a_{n+1}+7a_n = 0, \quad \forall n \ge n_0. \tag{1.4}
$$

设 x 为实变量, 记

$$
\phi(x) \coloneqq \sum_{n\ge n_0} a_n x^n,
$$

则由 (1.4) 存在互质的整系数多项式 $p(z), q(z)$ 使得

$$
\phi(x) = z^{n_0}\frac{p(x)}{q(x)},
$$

并且 $q(0)=1$. 事实上, 我们有

$$\phi(x)=\sum_{n\geq n_0}a_nx^n,\quad z\phi(x)=\sum_{n\geq n_0+1}a_{n-1}x^n,\quad z^2\phi(z)=\sum_{n\geq n_0+2}a_{n-2}x^n.$$

故

$$\phi(x)-6z\phi(x)+7z^2\phi(x)=a_{n_0}x^{n_0}+a_{n_0+1}x^{n_0+1}-6a_{n_0}x^{n_0+1},$$

从而

$$\phi(x)=x^{n_0}\frac{a_{n_0}+(a_{n_0+1}-6a_{n_0})x}{1-6x+7x^2},$$

特别地, $q(x)=1-6x+7x^2$.

再记

$$\begin{aligned}\varphi(x)&:=\sum_{n\geq n_0}\varepsilon_nx^n=\sum_{n\geq n_0}s\alpha^nx^n-\phi(x)\\&=s\alpha^{n_0}x^{n_0}\frac{1}{1-\alpha x}-z^{n_0}\frac{p(x)}{1-6x+7x^2}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

注意到 ε_n 有界, 有 $\varphi(x)$ 收敛半径至少为 1. 而 (1.5) 式右侧级数收敛半径至少为 1 将会要求 $1/\alpha$ 为方程 $1-6x+7x^2=0$ 的根, 并且要求 (1.5) 式右侧两项合并化简之后, 得到分母的另一零点绝对值必须大于 1. 而我们知道这个极点是 $1-6x+7x^2=0$ 除了 $x=1/\alpha$ 的另一个根, 这个根通过简单计算可知即为 $1/\beta=1/(3-\sqrt{2})$, 但是

$$\beta>1\Rightarrow\left|\frac{1}{\beta}\right|<1,$$

矛盾! 这样我们完成了满足题设的非零实数 s 不存在的证明.

■

练习 6.9

称实代数数 $\alpha>1$ 为 **Pisot 数**, 若其所有 Galois 共轭 (即 α 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中的极小多项式的其他复根) 模长均严格小于 1.

1. 若代数数 $\alpha>1$, 并存在非零实数 ξ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\xi\alpha^n\|=0$, 证明: α 为 Pisot 数, 并且 $\xi\in\mathbb{Q}(\alpha)$.
2. 令 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p,q\in\mathbb{N}_+$ 且 $p>q\geq2$, $(p,q)=1$. 则数列 $\big(\{\xi(p/q)^n\}\big)_{n\geq1}$ 有无穷多个极限点.

问题 6.10

令 $\alpha>2$ 为一实数, m 为一正整数. 证明: 存在实数 $\xi\in(m,m+1)$ 使得

$$\{\xi\alpha^n\}\in\left[0,\frac{1}{\alpha-1}\right],\quad\forall n\geq0.$$

问题的解答.

这里是解答.

■

练习 6.11

对任意实数列 $(r_n)_{n\geq 1}$ 及任意正实数 ε, 证明: 存在不可数的实数 $\alpha > 1$ 使得 $\|\alpha^n - r_n\| \leq \varepsilon$ 对任意正整数 n 成立.

问题 6.12: Furstenberg 定理

设 $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, 且 $\dfrac{\ln r}{\ln s} \notin \mathbb{Q}$. 证明: 对任意无理数 ξ, 集合 $\left(\{\xi r^m s^n\}\right)_{m,n\geq 0}$ 在 $[0,1]$ 中稠密.

问题的解答.

这里是解答.

Part II

连续性、单调性与凹凸性

Part III

微分

Part IV

积分