来自 2016 年的自编高考模拟卷

不想写论文的包包

一、选择题（$5 \times 10 = 50$ 分）

1. （5 分） 与集合 $\{(A,B,C,D) \mid A,B,C,D$ 四点不共球$\}$ 相等的集合是 $\underline{\quad \mathbf{B} \quad}$.

   A. $\{(A,B,C,D) \mid A,B,C,D$ 四点共面$\}$

   B. $\{(A,B,C,D) \mid A,B,C,D$ **四点共面且不共圆**$\}$

   C. $\{(A,B,C,D) \mid A,B,C,D$ 四点中至少有三点共线$\}$

   D. $\{(A,B,C,D) \mid A,B,C,D$ 四点共线$\}$

解：四点不共面则必共球.

若四点共面还再不共圆, 世人又怎知我可先嵌入圆, 再嵌入球.

2. （5 分） 平面 α, β 及直线 a, b, l 满足：$a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$. 则 "$a \perp b$" 是 "$a \perp l$ 或 $b \perp l$" 的 $\underline{\quad \mathbf{A} \quad}$.

   A. 充要条件

   B. 充分不必要条件

   C. 必要不充分条件

   D. 既不充分也不必要条件

解：必要性显然. 下证充分性.

不妨设 $a \neq l$, 否则结果显然. 若 $a \perp l$ 不成立, 任取点 $p \in a \setminus l$, 过 p 在 α 中做 l 的垂线 c, 则 $c \perp \beta$, 从而 $c \perp b$. 此时 $b \perp a, b \perp c \Rightarrow b \perp \alpha$, 特别地有 $b \perp l$.

3. （5 分） a_1, a_2, a_3 是以 d 为公差的等差数列, b_1, b_2, b_3 是以 1 为首项的等比数列. 若 $\max\{a_1 + b_3, a_2 + b_2, a_3\} = a_2 + b_2$, 则 d 的最大值为 $\underline{\quad \mathbf{C} \quad}$.

   A. 0　B. 1　**C.** 2　D. 3

解：设 q 为该等比数列的公比. 由题意有

$$a_1+b_3=a_1+q^2, a_2+b_2=a_1+d+q, a_3=a_1+2d,$$

且

$$a_1+d+q \geqslant a_1+q^2, a_1+d+q \geqslant a_1+2d.$$

即

$$q \geqslant d \geqslant q^2-q.$$

从而 $0<q \leqslant 2$, $d_{\max}=2$ (此时 $q=2$).

4. （5 分） 若 a 为正实数, 且在极坐标 (ρ,θ) 中, 方程 $\rho(a-\sin\theta)=a$ 表示一条抛物线, 则 $a=$ **D** .

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ **D.** 1

解：化到直角坐标系.

$$a\sqrt{x^2+y^2}-y=a,$$

即

$$a^2(x^2+y^2)=(y+a)^2=y^2+2ay+a^2,$$

从而

$$a^2x^2=(1-a^2)y^2+2ay+a^2.$$

若此为抛物线方程, 则必有 $1-a^2=0$, 即 $a=1$.

5. （5 分） 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 记 O_1,O_2,O_3,O_4,O_5 分别为面 $A_1B_1C_1D_1$, AA_1B_1B, AA_1D_1D, BB_1C_1C, CC_1D_1D 的中心, 则平面 $O_1O_2O_3$ 与 $O_1O_4O_5$ 所成角的余弦值为 **B** .

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

解：实际上这个角即为二面角 $A-B_1D_1-C$, 也即为 $\angle AO_1C$. 直接余弦定理可得 $\cos\angle AO_1C=\frac{1}{3}$.

6. （5 分） 复平面上所有使得 $\frac{z+1}{\bar{z}-1}$ 为一纯虚数的复数 z 所对应的点形成的轨迹是 **C** 或其一部分.

A. 直线 B. 圆 **C. 双曲线** D. 抛物线

解: 记 $z=x+yi$. 则

$$\frac{z+1}{\bar{z}-1}=\frac{x+1+yi}{x-1-yi}=\frac{(x+1+yi)(x-1+yi)}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2-y^2-1+\cdots i}{\cdots}$$

为纯虚数可得 $x^2-y^2=1$. 这对应于一个双曲线方程 (思考一下为什么题目里说的是 “或其一部分”).

7. （5 分） 数列 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{100}$ 为公比不为 ±1 的等比数列. 则从这 100 项中任取三个不同项, 它们的两两的乘积仍能组成一个等比数列的概率是 $\underline{\textbf{B}}$.

A. $\frac{1}{22}$ **B.** $\frac{1}{66}$ C. $\frac{1}{99}$ D. $\frac{1}{198}$

解: 设取出来的三个项分别为 a_i,a_j,a_k, $1\leqslant i<j<k\leqslant 100$. 则 a_ia_j,a_ia_k,a_ja_k 成一等比数列等价于 $2(i+k)=(i+j)+(j+k)$, 即 $2j=i+k$. 我们先取定 j 再看可以取的 i,k 的数量, 可以得到欲求概率为

$$\mathrm{P}=\frac{\sum\limits_{j=2}^{99}\min\{j-1,100-j\}}{C_{100}^3}=\frac{\frac{49\times(49+1)}{2}\times 2}{\frac{100\times 99\times 98}{2\times 3}}=\frac{1}{66}.$$

8. （5 分） 若函数 $f(x)=e^{x^2}-\frac{ax}{e^{1/x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点, 其中 e 为自然对数底数, 则参数 a 的取值范围为 $\underline{\textbf{A}}$.

A. $[e^2,+\infty)$ B. $[1,+\infty)$ C. $[e,+\infty)$ D. $(e,+\infty)$

解: 首先必定 $a>0$. 再注意到

$$f(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}=\frac{ax}{e^{1/x}}\Leftrightarrow \ln a=x^2+\frac{1}{x}-\ln x.$$

令 $h(x)=x^2+\frac{1}{x}-\ln x$ $(x>0)$. 求导方法可求得 $h_{\min}=h(1)=2$ (且 $h_{\max}=+\infty$). 从而 a 取值范围为 $[e^2,+\infty)$.

9. （5 分） 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\mathcal{C}_1$ 的焦点 F_1,F_2 在 x 轴上, A_1,A_2 为 $\mathcal{C}_1$ 左右顶点. 以 F_1,F_2 分别为左右顶点且以 $\mathcal{C}_1$ 短轴为虚轴的双曲线 $\mathcal{C}_2$ 与 $\mathcal{C}_1$ 交于四点, 以原点 O 为圆心且经过这四点的圆与 y 轴交于 B_1,B_2 两点. 则经过点 A_1,A_2,B_1,B_2 且焦点在 x 轴上的椭圆的离心率的最大值为 $\underline{\textbf{B}}$.

A. $3-2\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ D. $2\sqrt{2}-2$

解: 设椭圆 $\mathcal{C}_1$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$, $c:=\sqrt{a^2-b^2}$. 则 $\mathcal{C}_2$ 方程应为 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 联立 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ 方程, 可解得其四个交点的坐标为 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{a^2+c^2}},\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$. 从而经过这四点的圆的方程为

$$x^2+y^2=\frac{2a^2c^2+b^4}{a^2+c^2}=:d^2,$$

有 $\{B_1,B_2\}=(0,\pm d)$. 从而经过点 A_1,A_2,B_1,B_2 且焦点在 x 轴上的椭圆的离心率 e 为

$$e^2=1-\frac{d^2}{a^2}=\frac{a^2b^2-b^4}{2a^4-a^2b^2}=\frac{t-t^2}{2-t}=3-\left(2-t+\frac{2}{2-t}\right),$$

其中 $t=\dfrac{b^2}{a^2}\in(0,1)$. 从而当 $t=2-\sqrt{2}$ 时, e 取得最大值 $e_{\max}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

10. （5 分） 变量 x,y 满足

$$\begin{cases} y\leqslant kx^2 \\ y\geqslant 2kx_1x-kx_1^2 \\ y\leqslant 2kx_2x-kx_2^2 \end{cases},$$

其中 x_1,x_2,k 为参数, 且 $x_1<0<x_2$, $k>0$. 若 $y-8x$ 取**最小值**时 x 的值为 1, 且有且仅有两组有序实数对 (x,y) 使其达**最大值**, 则 k 的值为 __**D**__.

A. 1 B. 2 C. 3 **D.** 4

解: 平面直角坐标系中, (x,y) 所可以处于的区域为: 抛物线 $y=kx^2$ 下方并在该抛物线上 $A(x_1,kx_1^2),B(x_2,kx_2^2)$ 两点处的两条切线上方. 从而 $y-8x$ 取最小值位置是这两条切线交点处, 即有

$$2kx_1-kx_1^2=2kx_2-kx_2^2\Rightarrow x_1+x_2=2.$$

另一方面有且仅有两组数对可使 $y-8x$ 取最大值, 可知这两点就是 A,B 两点, 这两点连线的斜率就是 8. 即

$$8=\frac{kx_2^2-kx_1^2}{x_2-x_1}=k(x_1+x_2)\Rightarrow k=4.$$

二、填空题（$5\times5=25$ 分）

11. （5 分） 在 $\triangle ABC$ 中, a,b,c 分别为顶点 A,B,C 对边长, S 为 $\triangle ABC$ 面积. 若有 $\tan A\tan B\geqslant\dfrac{1}{\cos(A-B)-\cos C}+1$, 及 $(a+b+c)(a+b-c)\sin C\leqslant 6S$, 则角 $C=$ __$\dfrac{\pi}{3}$__.

解:

$$\begin{aligned}\tan A\tan B &\geqslant \frac{1}{\cos(A-B)-\cos C}+1\\ &= \frac{1}{\cos(A-B)+\cos(A+B)}+1\\ &= \frac{1}{2\cos A\cos B}+1\\ \Rightarrow \sin A\sin B &\geqslant \frac{1}{2}+\cos A\cos B \Rightarrow \cos C\geqslant\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a+b-c)\sin C\leqslant 6S\\ &\Rightarrow a^2+2ab+b^2-c^2\leqslant 3ab\\ &\Rightarrow a^2+b^2-c^2\leqslant ab\Rightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leqslant\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故 $\cos C=\frac{1}{2}$, $C=\frac{\pi}{3}$. 作为填空题来说两个只要算出一个答案基本就确定了 (堪称 "命题人之仁慈").

12. (5 分) 曲线 $\mathcal{C}$ 为函数 $y=1-\frac{3}{4}x^2\,(y\geqslant 0)$ 图象. 点 A 为曲线 $\mathcal{C}$ 与 x 轴左半轴交点. 若让曲线 $\mathcal{C}$ 绕点 A 顺时针旋转至第一次恰好仍然可以作为一个区间上的函数的图象时停止, 则旋转过程中曲线 $\mathcal{C}$ 所扫过的区域的面积为$\underline{\frac{8}{9}\pi}$.

解: A 点坐标为 $(-\frac{2}{\sqrt{3}},0)$, $\mathcal{C}$ 在 A 点切线斜率为 $k=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}$, 即该切线与 x 轴夹角为 $\frac{\pi}{3}$. 从而题意所示旋转过程总旋转角度为 $\frac{\pi}{6}$. 利用 "割补法" 可知旋转过程中扫过面积等于一个半径为 $\frac{4}{\sqrt{3}}$ 中心角为 $\frac{\pi}{6}$ 的扇形面积. 从而欲求面积为

$$\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{8}{9}\pi.$$

13. (5 分) 任取两个整数 a,b, 则 $a^2-ab+9b^2$ 能被 11 整除的概率为$\underline{\frac{21}{121}}$.

解: 注意到

$$\begin{aligned}a^2-ab+9b^2 &\equiv a^2-ab-2b^2 \mod 11\\ &\equiv (a-2b)(a+b) \mod 11.\end{aligned}$$

故 $11|(a^2-ab+9b^2)\Leftrightarrow 11|(a-2b)$ 或 $11|(a+b)$. 由此可得欲求概率为

$$\frac{11}{11\times 11}+\frac{11}{11\times 11}-\frac{1}{11\times 11}=\frac{21}{121},$$

其中第一项为 $11|(a-2b)$ 的概率, 第二项为 $11|(a+b)$ 的概率, 最后再减去重复的两者同时成立的概率.

14. （5 分） 正实数 a,b 满足 $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant 12$, $(a+b)ab\geqslant 2$. 则 $\left(\dfrac{4}{ab}+1\right)(a+b)$ 的取值范围为 $[8,36]$.

解: 参见 https://zhuanlan.zhihu.com/p/41115526.

15. （5 分） 若定义在 $(0,+\infty)$ 且取值于 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x_1,x_2>0$, 有

$$f(x_1+x_2)\leqslant\frac{f(x_1)f(x_2)}{f(x_1)+f(x_2)},$$

则称 $f(x)$ 为次反比函数. 以下关于次反比函数的说法中正确的是 ①②③④ .

① $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ 为次反比函数;

② 次反比函数必为严格单调递减函数;

③ 若 $f(x)$ 为次反比函数, 则必不存在常数 $m>0$ 使得对任意 $x>0$ 均有 $f(x)\geqslant m$;

④ 若 $f(x)$ 为次反比函数, 则必不存在常数 $M>0$ 使得对任意 $x>0$ 均有 $f(x)\leqslant M$;

⑤ 若次反比函数 $f(x)$ 满足

$$\sum_{k=0}^{2016}\left(f(2^k)+\frac{1}{f(2^{-k})}\right)\geqslant 5,$$

则必有 $f(1)>2$.

解: f 为次反比函数等价于对任意 $x_1,x_2>0$, 有

$$\frac{1}{f(x_1+x_2)}\geqslant\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}.$$

① 直接带入验证.

② $1/f(x_1+x_2)>1/f(x_1)$, 即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)$.

③ $1/f(2x)\geqslant 2/f(x)$, 从而 $f(2^k)\leqslant 2^{-k}f(1)$, 可知这样的 m 不存在.

④ $f(x/2)\geqslant 2f(x)$, 从而 $f(2^{-k})\geqslant 2^k f(1)$, 即这样的 M 也不存在.

⑤ 可以发现 $f(x)=\dfrac{c}{x}\ (x>0)$ 在 $c<1/2$ 时也满足该不等式. 实际上我们能得到的是 $f(1)>2$ 或 $f(1)<1/2$.

由于

$$\frac{1}{f(2^k)} \geqslant \frac{1}{f(2^{k-1})} + \frac{1}{f(2^{k-1})} \geqslant \cdots \geqslant \frac{2^k}{f(1)},$$

以及

$$\frac{1}{f(1)} \geqslant \frac{1}{f(2^{-1})} + \frac{1}{f(2^{-1})} \geqslant \cdots \geqslant \frac{2^k}{f(2^{-k})},$$

可得

$$f(2^k) \leqslant \frac{1}{2^k} \cdot f(1),\ \ \frac{1}{f(2^{-k})} \leqslant \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{f(1)},\ \ k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

由题意不等式, 即有

$$5 \leqslant \left(f(1) + \frac{1}{f(1)}\right)\sum_{k=0}^{2016}\frac{1}{2^k} < 2\left(f(1) + \frac{1}{f(1)}\right),$$

从而 $f(1) > 2$ 或 $f(1) < 1/2$.

三、解答题（共 75 分）

16. （12 分） 设 $\mathcal{C}$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 位于第一象限的部分. 对 $\mathcal{C}$ 上任一点 P, 设其坐标为 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, 并记 P 与原点连线和 x 轴形成的夹角为 β, 其中 $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$. 若 P 点在 $\mathcal{C}$ 上移动的过程中 $|\alpha - \beta|$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$, 求该椭圆的离心率.

解： 由题意

$$\tan\beta = \frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha} = \frac{b}{a}\tan\alpha.$$

从而

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)\tan\alpha}{1 + \dfrac{b}{a}\tan^2\alpha} = \frac{a - b}{b\tan\alpha + \dfrac{a}{\tan\alpha}},\ \ \tan\alpha \in (0, +\infty).$$

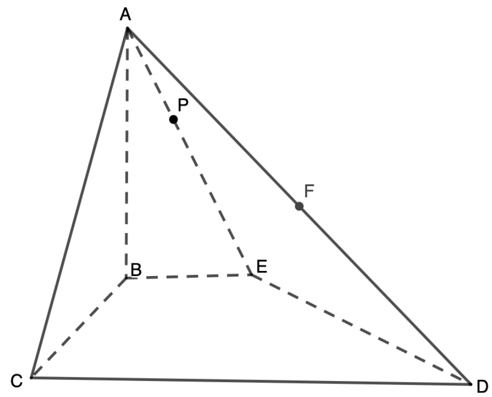
故

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\alpha - \beta)_{\max} = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3}.$$

那么该椭圆离心率即为 $e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

17. （12 分） 在四棱锥 $A - BCDE$ 中, $AB \perp$ 底面 $BCDE$, 且四边形 $BCDE$ 为等腰梯形, 其中 $BE \mathbin{/\!/} CD$, $AB = 2$, $BE = 1$, $BC = ED = \sqrt{2}$, $CD = 3$.

1. 求二面角 $A-CE-B$ 的正切值.
2. P 为直线 AE 上的任意一点, F 为 AD 中点. 求证: $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 为定值.



解: 第一题可建系可几何法 (结果大概为 $2\sqrt{5}$), 第二题直接建系计算, 没什么好说的.

18. （12 分） 正 $(4k+2)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{4k+2}$ 外接圆半径为 1, 其中 k 为正整数. 从顶点 $A_2, A_3, \ldots,$ $A_{2k+1}, A_{2k+3}, \ldots, A_{4k+2}$ 这 $4k$ 个顶点中任取两个连成线段, 并记所得线段上的点与线段 A_1A_{2k+2} 的距离的最小值为 $\mathbf{X}$.

1. 求概率 $\mathrm{P}(\mathbf{X}=0)$.
2. 记 $\mathbf{X}$ 的数学期望为 $\mathbb{E}(\mathbf{X})$. 求证: $\mathbb{E}(\mathbf{X})<\dfrac{k+1}{6(2k+1)}\pi$.

解: $\mathbf{X}=0$ 等价于取的点分别位于直线 A_1A_{2k+2} 两侧, 即

$$\mathrm{P}(\mathbf{X}=0)=\frac{2k\times 2k}{C_{4k}^2}=\frac{2k}{4k-1}.$$

另有

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{X}=\sin\frac{2j\pi}{4k+2}\right)=2\times\frac{2\times(2k-2j)+1}{C_{4k}^2}=\frac{4k+1-4j}{k(4k-1)},$$

其中 $j=1,\ldots,k$. 这是 $\mathbf{X}$ 的完整分布列. 从而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{X})&=\sum_{j=1}^{k}\frac{4k+1-4j}{k(4k-1)}\sin\frac{j\pi}{2k+1}\\&<\sum_{j=1}^{k}\frac{4k+1-4j}{k(4k-1)}\cdot\frac{j\pi}{2k+1}\\&=\frac{(4k+1)\pi\times\dfrac{k(k+1)}{2}-4\pi\times\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{k(4k-1)(2k+1)}\\&=\frac{k+1}{6(2k+1)}\pi.\end{aligned}$$

实际上, $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{E}(\mathbf{X})=\int_0^1(1-x)\sin(\pi x/2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi^2}$. 这对应于在圆周上任取两点连成线段与某条固定直径的 (线段与线段之间的) 距离的均值.

19. （13 分） 令双曲线 $\mathcal{C}_1$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a,b>0)$, F_1,F_2 分别为 $\mathcal{C}_1$ 左、右焦点, A_1,A_2 为 $\mathcal{C}_1$ 左、右顶点, 并记 $\mathcal{C}_1$ 的离心率为 e_1. 过 F_1 的直线 l 交双曲线 $\mathcal{C}_1$ 于 P,Q 两点, R 为直线 l 上一点, 且满足 $\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_2P}+\overrightarrow{A_1Q}+\overrightarrow{A_2Q}=\lambda\overrightarrow{F_2R}$, 其中 λ 为实数. 随着直线 l 的不同选取, 设 R 所形成轨迹为曲线 $\mathcal{C}_2$. 求证:

1. λ 为定值 (与直线 l 选取无关);
2. 曲线 $\mathcal{C}_2$ 为双曲线, 且 $\mathcal{C}_2$ 离心率 e_2 满足 $e_2=e_1$.

解: 取 PQ 中点 T, 则

$$\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_2P}+\overrightarrow{A_1Q}+\overrightarrow{A_2Q}=2(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=4\overrightarrow{OT},$$

其中 O 为坐标原点. 故

$$\lambda=4\cdot\frac{|\overrightarrow{OT}|}{|\overrightarrow{F_2R}|}=4\frac{|F_1O|}{|F_1F_2|}=2.$$

另一方面, 由 “点差法” 可知

$$k_{OT}\cdot k_l=-\frac{b^2}{a^2},$$

其中 k_l 为 l 斜率. 故由 F_2R 与 OT 平行可知

$$k_{F_2R}\cdot k_{F_1R}=k_{OT}\cdot k_l=-\frac{b^2}{a^2}.$$

这也对应于一种双曲线的定义, 即点 R 形成的轨迹也是双曲线. 且实际上可以求出 $\mathcal{C}_2$ 对应的方程为

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2y^2}{b^2(a^2+b^2)}=1.$$

总之是有 $e_2=e_1$ 的.

20. （13 分） 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1=a\left(\frac{1}{2}<a<2\right),\ a_{n+1}=\frac{5}{2}-\frac{1}{a_n}.$$

1. 若 $a=\frac{7}{5}$, 求 $\{a_n\}$ 通项公式.
2. 用 a 表示出使得 $a_1a_2\cdots a_n\sqrt{a_{n+1}-a_n}<b$ 对任意正整数 n 恒成立的实数 b 的最小值.

解：参见 https://zhuanlan.zhihu.com/p/36298147.

21. （13 分） 记 e 为自然对数底数. 若函数 $y=e\ln x$ 与函数 $y=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\,(b>a>0)$ 的图象自左向右分别交于横坐标分别为 x_1,x_2,x_3 的三个不同的点, 证明:

1. $\frac{x_3}{x_1}\leqslant\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$;
2. $\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{e}{2}}$.

解：参见 https://zhuanlan.zhihu.com/p/36286195.

实际上也有不用技巧直接证明的方法 (我高中时候写过), 但现在能力退化写不出来了.