来自 2016 年的自编高考模拟卷

不想写论文的包包

一、选择题（$5\times 10=50$ 分）

1. （5 分） 与集合 $\{(A,B,C,D)\mid A,B,C,D$ 四点不共球$\}$ 相等的集合是______.

   A. $\{(A,B,C,D)\mid A,B,C,D$ 四点共面$\}$

   B. $\{(A,B,C,D)\mid A,B,C,D$ 四点共面且不共圆$\}$

   C. $\{(A,B,C,D)\mid A,B,C,D$ 四点中至少有三点共线$\}$

   D. $\{(A,B,C,D)\mid A,B,C,D$ 四点共线$\}$

2. （5 分） 平面 α,β 及直线 a,b,l 满足：$a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$. 则 "$a\perp b$" 是 "$a\perp l$ 或 $b\perp l$" 的______.

   A. 充要条件

   B. 充分不必要条件

   C. 必要不充分条件

   D. 既不充分也不必要条件

3. （5 分） a_1,a_2,a_3 是以 d 为公差的等差数列, b_1,b_2,b_3 是以 1 为首项的等比数列. 若 $\max\{a_1+b_3,a_2+b_2,a_3\}=a_2+b_2$, 则 d 的最大值为______.

   A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

4. （5 分） 若 a 为正实数, 且在极坐标 (ρ,θ) 中, 方程 $\rho(a-\sin\theta)=a$ 表示一条抛物线, 则 $a=$______.

   A. $\dfrac{1}{4}$　B. $\dfrac{1}{3}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. 1

5. （5 分） 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 记 O_1,O_2,O_3,O_4,O_5 分别为面 $A_1B_1C_1D_1$, AA_1B_1B, AA_1D_1D, BB_1C_1C, CC_1D_1D 的中心, 则平面 $O_1O_2O_3$ 与 $O_1O_4O_5$ 所成角的余弦值为______.

   A. $\dfrac{1}{4}$　B. $\dfrac{1}{3}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

6. （5 分） 复平面上所有使得 $\dfrac{z+1}{\bar{z}-1}$ 为一纯虚数的复数 z 所对应的点形成的轨迹是______ 或其一部分.

   A. 直线　B. 圆　C. 双曲线　D. 抛物线

7. （5 分） 数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ 为公比不为 ± 1 的等比数列. 则从这 100 项中任取三个不同项, 它们的两两的乘积仍能组成一个等比数列的概率是______.

A. $\dfrac{1}{22}$ B. $\dfrac{1}{66}$ C. $\dfrac{1}{99}$ D. $\dfrac{1}{198}$

8. （5 分） 若函数 $f(x) = e^{x^2} - \dfrac{ax}{e^{1/x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 其中 e 为自然对数底数, 则参数 a 的取值范围为______.

A. $[e^2, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $[e, +\infty)$ D. $(e, +\infty)$

9. （5 分） 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\mathcal{C}_1$ 的焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, A_1, A_2 为 $\mathcal{C}_1$ 左右顶点. 以 F_1, F_2 分别为左右顶点且以 $\mathcal{C}_1$ 短轴为虚轴的双曲线 $\mathcal{C}_2$ 与 $\mathcal{C}_1$ 交于四点, 以原点 O 为圆心且经过这四点的圆与 y 轴交于 B_1, B_2 两点. 则经过点 A_1, A_2, B_1, B_2 且焦点在 x 轴上的椭圆的离心率的最大值为______.

A. $3 - 2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ D. $2\sqrt{2} - 2$

10. （5 分） 变量 x, y 满足

$$\begin{cases} y \leqslant kx^2 \\ y \geqslant 2kx_1x - kx_1^2 \\ y \leqslant 2kx_2x - kx_2^2 \end{cases},$$

其中 x_1, x_2, k 为参数, 且 $x_1 < 0 < x_2$, $k > 0$. 若 $y - 8x$ 取**最小值**时 x 的值为 1, 且有且仅有两组有序实数对 (x, y) 使其达**最大值**, 则 k 的值为______.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题（$5 \times 5 = 25$ 分）

11. （5 分） 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为顶点 A, B, C 对边长, S 为 $\triangle ABC$ 面积. 若有 $\tan A \tan B \geqslant \dfrac{1}{\cos(A-B) - \cos C} + 1$, 及 $(a+b+c)(a+b-c)\sin C \leqslant 6S$, 则角 $C =$______.

12. （5 分） 曲线 $\mathcal{C}$ 为函数 $y = 1 - \dfrac{3}{4}x^2\,(y \geqslant 0)$ 图象. 点 A 为曲线 $\mathcal{C}$ 与 x 轴左半轴交点. 若让曲线 $\mathcal{C}$ 绕点 A 顺时针旋转至第一次恰好仍然可以作为一个区间上的函数的图象时停止, 则旋转过程中曲线 $\mathcal{C}$ 所扫过的区域的面积为______.

13. （5 分） 任取两个整数 a, b, 则 $a^2 - ab + 9b^2$ 能被 11 整除的概率为______.

14. （5 分） 正实数 a, b 满足 $a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \leqslant 12$, $(a+b)ab \geqslant 2$. 则 $\left(\dfrac{4}{ab} + 1\right)(a+b)$ 的取值范围为______.

15. （5 分） 若定义在 $(0, +\infty)$ 且取值于 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x_1, x_2 > 0$, 有

$$f(x_1 + x_2) \leqslant \frac{f(x_1)f(x_2)}{f(x_1) + f(x_2)},$$

则称 $f(x)$ 为*次反比函数*. 以下关于*次反比函数*的说法中正确的是__________.

① $f(x)=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$ 为次反比函数;

② 次反比函数必为严格单调递减函数;

③ 若 $f(x)$ 为次反比函数, 则必不存在常数 $m>0$ 使得对任意 $x>0$ 均有 $f(x)\geqslant m$;

④ 若 $f(x)$ 为次反比函数, 则必不存在常数 $M>0$ 使得对任意 $x>0$ 均有 $f(x)\leqslant M$;

⑤ 若次反比函数 $f(x)$ 满足

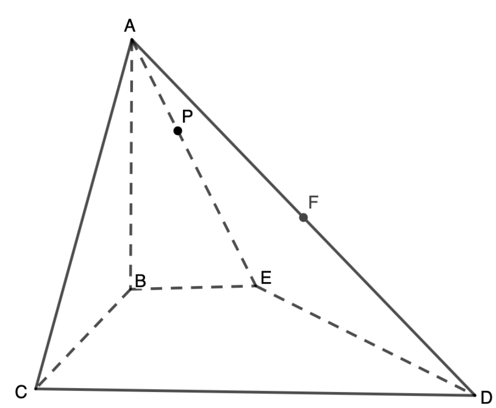
$$\sum_{k=0}^{2016}\left(f(2^k)+\frac{1}{f(2^{-k})}\right)\geqslant 5,$$

则必有 $f(1)>2$.

三、解答题（共 75 分）

16. （12 分） 设 $\mathcal{C}$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b>0)$ 位于第一象限的部分. 对 $\mathcal{C}$ 上任一点 P, 设其坐标为 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, 并记 P 与原点连线和 x 轴形成的夹角为 β, 其中 $0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$. 若 P 点在 $\mathcal{C}$ 上移动的过程中 $|\alpha-\beta|$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$, 求该椭圆的离心率.

17. （12 分） 在四棱锥 $A-BCDE$ 中, $AB\perp$ 底面 $BCDE$, 且四边形 $BCDE$ 为等腰梯形, 其中 $BE\,/\!/\,CD$, $AB=2$, $BE=1$, $BC=ED=\sqrt{2}$, $CD=3$.
    1. 求二面角 $A-CE-B$ 的正切值.
    2. P 为直线 AE 上的任意一点, F 为 AD 中点. 求证: $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 为定值.



18. （12 分） 正 $(4k+2)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{4k+2}$ 外接圆半径为 1, 其中 k 为正整数. 从顶点 $A_2, A_3, \ldots, A_{2k+1}, A_{2k+3}, \ldots, A_{4k+2}$ 这 $4k$ 个顶点中任取两个连成线段, 并记所得线段上的点与线段 A_1A_{2k+2} 的距离的最小值为 $\mathbf{X}$.

1. 求概率 $\mathrm{P}(\mathbf{X}=0)$.
2. 记 $\mathbf{X}$ 的数学期望为 $\mathbb{E}(\mathbf{X})$. 求证: $\mathbb{E}(\mathbf{X})<\dfrac{k+1}{6(2k+1)}\pi$.

19. （13 分） 令双曲线 $\mathcal{C}_1\colon \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ (a,b>0)$, F_1,F_2 分别为 $\mathcal{C}_1$ 左、右焦点, A_1,A_2 为 $\mathcal{C}_1$ 左、右顶点, 并记 $\mathcal{C}_1$ 的离心率为 e_1. 过 F_1 的直线 l 交双曲线 $\mathcal{C}_1$ 于 P,Q 两点, R 为直线 l 上一点, 且满足 $\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_2P}+\overrightarrow{A_1Q}+\overrightarrow{A_2Q}=\lambda\overrightarrow{F_2R}$, 其中 λ 为实数. 随着直线 l 的不同选取, 设 R 所形成轨迹为曲线 $\mathcal{C}_2$. 求证:

1. λ 为定值 (与直线 l 选取无关);
2. 曲线 $\mathcal{C}_2$ 为双曲线, 且 $\mathcal{C}_2$ 离心率 e_2 满足 $e_2=e_1$.

20. （13 分） 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1=a\left(\frac{1}{2}<a<2\right),\ a_{n+1}=\frac{5}{2}-\frac{1}{a_n}.$$

1. 若 $a=\dfrac{7}{5}$, 求 $\{a_n\}$ 通项公式.
2. 用 a 表示出使得 $a_1a_2\cdots a_n\sqrt{a_{n+1}-a_n}<b$ 对任意正整数 n 恒成立的实数 b 的最小值.

21. （13 分） 记 e 为自然对数底数. 若函数 $y=e\ln x$ 与函数 $y=b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}\,(b>a>0)$ 的图象自左向右分别交于横坐标分别为 x_1,x_2,x_3 的三个不同的点, 证明:

1. $\dfrac{x_3}{x_1}\leqslant\dfrac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$;
2. $\dfrac{b}{a}<\sqrt{\dfrac{e}{2}}$.