

定理 3.5 的证明

数学归纳法可以是一个直的长条多米诺骨牌, 也可以是曲折来回的螺旋状多米诺骨牌.

本节证明第 03 节的 定理 3.5.

回顾记号: $\tilde{v}$ 为 $R = \mathbb{C}[[x, y]]$ 上的 centered 赋值全体.

定理 3.5. 令 $[(U_j)_0^k; (\tilde{\beta}_j)_0^k]$ 为一个长度 $1 \leq k < \infty$ 的 SKP. 那么存在唯一的赋值 $v_k \in \tilde{v}$ 满足

(Q1) $v_k(U_j) = \tilde{\beta}_j$ 当 $0 \leq j \leq k$;

(Q2) 对任意满足 (Q1) 的赋值 $v \in \tilde{v}$ 有 $v_k \leq v$.

进一步地, 如果 $k > 1$, 并且 v_{k-1} 为类似于上述的对应于 $[(U_j)_0^{k-1}; (\tilde{\beta}_j)_0^{k-1}]$ 的赋值. 那么

(Q3) $v_{k-1} \leq v_k$;

(Q4) 对任意 $\phi \in R$, 有 $v_{k-1}(\phi) < v_k(\phi)$ 当且仅当在分次环 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 U_k 整除 ϕ .

赋值的构造

回顾 v_k 的具体构造过程.

1. 首先 v_1 直接选取为满足 $v_1(x) = \tilde{\beta}_0$ 及 $v_1(y) = \tilde{\beta}_1$ 的 monomial 赋值, 即:

$$v_1\left(\sum a_{ij}x^i y^j\right) = \min\{i\tilde{\beta}_0 + j\tilde{\beta}_1 \mid a_{ij} \neq 0\}.$$

2. 若 $k > 1$, 归纳构造 v_k . 假设 $v_1, \dots, v_{k-1}$ 已如要求构造出. 考虑任意多项式 $\phi \in \mathbb{C}[x, y]$. 由于 U_k 关于 y 首一, 我们可以在 $\mathbb{C}[x][y]$ 中用 U_k 除 ϕ 得到 $\phi = \phi_0 + U_k \psi$, 其中 $\deg_y(\phi_0) < d_k = \deg_y(U_k)$ 且 $\psi \in \mathbb{C}[x, y]$. 重复这个步骤, 我们最终会得到唯一的一个分解

$$\phi = \sum_j \phi_j U_k^j,$$

其中 $\phi_j \in \mathbb{C}[x, y]$ 且 $\deg_y(\phi_j) < d_k$. 定义:

$$v_k(\phi) := \min_j v_k(\phi_j U_k^j) := \min_j \{v_{k-1}(\phi_j) + j\tilde{\beta}_k\}.$$

注意很容易得到有以下基本结果:

- 若 $\deg_y(\phi) < d_k$, 则 $v_k(\phi) = v_{k-1}(\phi)$;
- $v_k(U_k) = \tilde{\beta}_k$, 且由 SKP 定义可知 $v_k(U_k) = \tilde{\beta}_k > n_{k-1}\tilde{\beta}_{k-1} = v_{k-1}(U_k)$;
- $v_k(K^*) \subset \sum_{j=0}^k \mathbb{Z}\tilde{\beta}_j$.

证明思路

对任意 $k \geq 1$, 记以下命题分别为

- (H_k) : 如上构造的 v_k 为满足 (Q1)-(Q4) 的赋值.
- (E_k) : 分次环 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 为欧几里得整环 (Euclidean domain).
- (I_k) : 多项式 U_k 与 U_{k+1} 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中不可约.
- (J_k) : 多项式 U_j 在 $\mathbb{C}[x, y]$ 与 $\mathbb{C}(x)[y]$ 中均不可约对所有 $1 \leq j \leq k$ 成立.

显然 H_1 与 J_1 是成立的. 定理 3.5 证明的策略是:

1. $J_k \& H_k \implies E_k$;
2. $J_k \& H_k \implies I_k$;
3. $E_k \& I_k \& H_k \implies H_{k+1}$;
4. $I_k \& J_k \& H_{k+1} \implies J_{k+1}$.

定理 3.5 的证明

1. $J_k \& H_k \implies E_k$

令 $\phi \in R$, 并按照前述考虑展开式 $\phi = \sum_j \phi_j U_k^j$. 定义

$$\delta_k(\phi) := \max \{j \mid v_k(\phi_j U_k^j) = v_k(\phi)\}.$$

并记 $\delta_k(0) = -\infty$.

引理 4.1. $\phi \equiv \phi' \pmod{v_k} \implies \delta_k(\phi) = \delta_k(\phi')$. 即 δ_k 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 上是良好定义的.

证明. 假设 $\delta_k(\phi) = l < l' = \delta_k(\phi')$. 令

$$\psi = \sum_{i>l} \phi_i U_k^i, \quad \psi' = \sum_{i>l'} \phi'_i U_k^i.$$

则 $v_k(\psi) > v_k(\phi) = v_k(\phi') < v_k(\psi')$, 但 $\psi \neq \psi'$ (两边关于 U_k 的次数不相等), 这与 $\phi \equiv \phi' \pmod{v_k}$ 矛盾. Q.E.D.

引理 4.2. 对任意 $\phi, \psi \in \mathbb{C}(x)[y]$, 有 $\delta_k(\phi\psi) = \delta_k(\phi) + \delta_k(\psi)$.

证明. 首先假设 $\delta_k(\phi) = \delta_k(\psi) = 0$. 即在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $\phi = \phi_0, \psi = \psi_0$. 由此不妨假设 $\deg_y(\phi), \deg_y(\psi) < d_k$. 从而 $\deg_y(\phi\psi) < 2d_k$. 故我们有分解

$$\phi\psi = \alpha_0 + \alpha_1 U_k, \quad \deg_u(\alpha_0), \deg_y(\alpha_1) < d_k.$$

假设 $v_k(\alpha_1 U_k) = v_k(\phi\psi)$, 则

$$v_{k-1}(\alpha_1 U_k) < v_k(\alpha_1 U_k) \leq v_k(\alpha_0) = v_{k-1}(\alpha_0).$$

从而 $v_{k-1}(\alpha_1 U_k) = v_{k-1}(\phi\psi)$. 但由归纳假设 (H_k) 有

$$v_{k-1}(\phi\psi) = v_{k-1}(\phi) + v_{k-1}(\psi) = v_k(\phi) + v_k(\psi) = v_k(\phi\psi),$$

即 $v_{k-1}(\alpha_1 U_k) = v_k(\alpha_1 U_k)$, 与 (Q4) 矛盾! 从而在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $\phi\psi = \alpha_0$, 且 $\delta_k(\phi\psi) = 0$.

对于一般情形, 有 $\phi = \sum \phi_j U_k^j, \psi = \sum \psi_j U_k^j$, 从而 $\phi\psi = \sum (\phi_i \psi_j) U_k^{i+j}$. 由前述 $\delta_k(\phi_i \psi_j) = 0$ 对所有 i, j 成立可知 $\delta_k(\phi\psi) \leq \delta_k(\phi) + \delta_k(\psi)$, 而反向不等式是直接的. Q.E.D.

引理 4.3. 对任意 $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$, 有 $\delta_k(\phi) = 0$ 当且仅当 ϕ 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中是单位.

证明. 若 $\delta_k(\phi) = 0$, 则在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $\phi = \phi_0$. 由归纳假设 (J_k) , 多项式 U_k 在 $\mathbb{C}(x)[y]$ 中不可约, 因此由 $\deg_y(U_k) > \deg_y(\phi_0)$ 知 ϕ_0 与 U_k 互素. 从而我们可以找到 $A, B \in \mathbb{C}(x)[y]$ 满足

$$A\phi_0 = 1 - BU_k, \quad \deg_y(A), \deg_y(B) < d_k.$$

此时根据定义 $v_k(A\phi_0) = v_k(1) < v_k(BU_k)$. 从而在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $A\phi_0 = 1$, 即 ϕ_0 以及因此 ϕ 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中是单位.

反过来, 如果 ϕ 为单位, 即在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $A\phi_0 = 1$ 对某个 $A \in \mathbb{C}(x)[y]$ 成立, 则由引理 4.2 知 $\delta_k(\phi) + \delta_k(A) = \delta_k(1) = 0$, 从而 $\delta_k(\phi) = 0$. Q.E.D.

引理 4.4. 若 $\phi, \psi \in \mathbb{C}(x)[y]$, 则存在 $Q, R \in \mathbb{C}(x)[y]$ 使得在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $\phi = Q\psi + R$ 且 $\delta_k(R) < \delta_k(\psi)$.

证明. 记 $\psi = \sum \psi_j U_k^j$. 只需对此引理在如下情形证明: 对所有 $j > M := \delta_k(\psi)$ 有 $\psi_j = 0$. 另外由引理 4.3 可进一步不妨设 $\psi_M = 1$. 此时 $\deg_y(\psi) = Md_k$. 在 $\mathbb{C}(x)[y]$ 中关于 y 用除法, 可知存在 $Q, R' \in \mathbb{C}(x)[y]$ 满足 $\deg_y(R') < \deg_y(\psi)$ 使得 $\phi = Q\psi + R'$. 记 $R' = \sum_i R_i U_k^i$, 并令 $N := \delta_k(R')$, 以及

$$R = \sum_{i \leq N} R_i U_k^i.$$

则在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $\phi = Q\psi + R$, 且

$$\deg_y(R_N) + Nd_k = \deg_y(R) < \deg_y(\psi) = Md_k.$$

因此 $N < M$. Q.E.D.

由引理 4.4, 函数 δ_k 满足所需条件, 使得 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 成为一个欧几里得整环, 这完成了第一步的证明. 特别地, 它是一个主理想整环以及唯一因子分解整环, 且我们可以在其上使用高斯引理 (Gauss' lemma).

2. $J_k \& H_k \implies I_k$

引理 4.5. 多项式 U_k 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中不可约.

证明. 显然 $\delta_k(U_k) = 1$. 因此若 $\phi\psi = U_k$ 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中成立, 则 $\delta_k(\phi) = 0$ 或 $\delta_k(\psi) = 0$, 此时由引理 4.3 知 ϕ 或 ψ 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中是单位. Q.E.D.

引理 4.6. 若 $j < k$, 则 U_j 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中为单位.

证明. 由引理 4.3 只需证 $\delta_k(U_j) = 0$. 若 $d_j < d_k$, 显然. 若 $d_j = d_k$, 则 $U_j = (U_j - U_k) + U_k$, 其中 $\deg_y(U_j - U_k) < d_k$. 此时 $v_k(U_j) = \tilde{\beta}_j < \tilde{\beta}_k = v_k(U_k) \implies v_k(U_j - U_k) < v_k(U_k)$, 即 $\delta_k(U_j) = 0$. Q.E.D.

引理 4.7. 若 $\delta_k(\phi) < n_k$, 则在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $\phi = \phi_i U_k^i$ 对某个 $i < n_k$ 成立.

证明. 反设 $v_k(\phi_i U_k^i) = v_k(\phi_j U_k^j) = v_k(\phi)$ 其中 $i \leq j < n_k$. 则

$$(j-i)\tilde{\beta}_k = v_{k-1}(\phi_i) - v_{k-1}(\phi_j) \in \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{Z}\tilde{\beta}_j.$$

此时由 SKP 定义知 $n_k \mid (j-i)$. 因此 $j = i$. Q.E.D.

引理 4.8. 多项式 U_{k+1} 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中不可约.

证明. 我们有 $U_{k+1} = U_k^{n_k} - \tilde{U}_{k+1}$, 其中 $\tilde{U}_{k+1} = \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$. 假设在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中有 $U_{k+1} = \phi\psi$, 且 $0 < \delta_k(\phi), \delta_k(\psi) < n_k$. 由引理 4.7 可知 $\phi = \phi_i U_k^i, \psi = \psi_j U_k^j$. 则 $U_{k+1} = \phi_i \psi_j U_k^{n_k}$ 从而

$$(1 - \phi_i \psi_j) U_k^{n_k} = \tilde{U}_{k+1}.$$

由于 U_k 不可约, 且 $\tilde{U}_{k+1}$ 为单位 (引理 4.6), 我们有在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 $\phi_i \psi_j = 1$. 但由此在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中将有 $\tilde{U}_{k+1} = 0$, 矛盾! 因此我们可以假设 $\delta_k(\phi) = n_k$ 且 $\delta_k(\psi) = 0$. 此时 ψ 为单位. Q.E.D.

至此我们完成了第二步的证明.

3. $E_k \& I_k \& H_k \implies H_{k+1}$

我们只需证 $v_{k+1}(\phi\psi) = v_{k+1}(\phi) + v_{k+1}(\psi)$ 对所有 $\phi, \psi \in \mathbb{C}[x, y]$ 成立即可. 回顾:

- 当 $\deg_y(\phi) < d_{k+1}$ 时 $v_{k+1}(\phi) = v_k(\phi)$;
- $v_k(U_{k+1}) < v_{k+1}(U_{k+1})$;
- $v_{k+1}(U_{k+1}\phi) = v_{k+1}(U_{k+1}) + v_{k+1}(\phi)$ 对所有 $\phi \in \mathbb{C}[x, y]$ 成立.

我们下面证明:

引理 4.9. 对所有 $\phi \in \mathbb{C}[x, y]$, 有 $v_{k+1}(\phi) \geq v_k(\phi)$.

证明. 对 $\deg_y(\phi)$ 进行归纳. 若 $\deg_y(\phi) < d_{k+1}$, 此时结论成立. 若 $\deg_y(\phi) \geq d_{k+1}$, 做分解 $\phi = \sum_i \phi_i U_{k+1}^i$. 由归纳假设以及上述性质, 不妨假设 $\phi_0 \neq 0$. 记 $\phi = \phi_0 + \psi$, 其中 $\psi = \sum_{i \geq 1} \phi_i U_{k+1}^i$. 若 $v_k(\phi) = \min\{v_k(\phi_0), v_k(\psi)\}$, 则由归纳假设

$$v_{k+1}(\phi) = \min\{v_{k+1}(\phi_0), v_{k+1}(\psi)\} \geq v_k(\phi),$$

此时欲证结论成立. 否则, 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中有 $\phi_0 + \psi = 0$, 即在此环中 U_{k+1} 整除 ϕ_0 . 但由于 $\deg_y(\phi_0) < d_{k+1}$, 因此 $\delta_k(\phi_0) < n_k$. 从而由引理 4.7 有 ϕ_0 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中等于不可约多项式 U_k 的某个幂次乘以一个单位. 但由引理 4.8 知 U_{k+1} 亦不可约, 矛盾! Q.E.D.

第三步的证明. 记

$$\mathfrak{p} := \{v_{k+1} > v_k\} \subset \text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y].$$

这是一个真理想: $U_{k+1} \in \mathfrak{p}$. 回忆 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 是一个欧几里得整环且 U_{k+1} 不可约, 知 $\mathfrak{p}$ 由 U_{k+1} 所生成.

对任意 $\phi, \psi \in \mathbb{C}[x, y]$, 我们证明 $v_{k+1}(\phi\psi) = v_{k+1}(\phi) + v_{k+1}(\psi)$. 首先假设 $\phi, \psi \notin \mathfrak{p}$, 则 $\phi\psi \notin \mathfrak{p}$. 由 (H_k) ,

$$v_{k+1}(\phi\psi) = v_k(\phi\psi) = v_k(\phi) + v_k(\psi) = v_{k+1}(\phi) + v_{k+1}(\psi).$$

对于一般情形, 我们记: 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中, $\phi = \hat{\phi} U_{k+1}^n$, $\psi = \hat{\psi} U_{k+1}^m$, 其中 $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ 与 U_{k+1} 互素, 即 $\hat{\phi}, \hat{\psi} \notin \mathfrak{p}$. 此时

$$\begin{aligned} v_{k+1}(\phi\psi) &= v_{k+1}(\hat{\phi}\hat{\psi}U_{k+1}^{m+n}) \\ &= v_{k+1}(\hat{\phi}\hat{\psi}) + (m+n)v_{k+1}(U_{k+1}) \\ &= v_{k+1}(\phi) + v_{k+1}(\psi). \end{aligned}$$

Q.E.D.

4. $I_k \& J_k \& H_{k+1} \implies J_{k+1}$

引理 4.10. 多项式 U_{k+1} 在 $\mathbb{C}[x, y]$ 及 $\mathbb{C}(x)[y]$ 中不可约.

证明. 由于 U_{k+1} 关于 y 首一, 其在 $\mathbb{C}[x, y]$ 中的不可约性可以推出其在 $\mathbb{C}(x)[y]$ 中的不可约性. 下面我们假设 $\phi\phi' = U_{k+1}$ 对 $\phi, \phi' \in \mathbb{C}[x, y]$ 成立. 由于 U_{k+1} 在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中不可约, 我们不妨假设 ϕ 在

$\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中的像是一个单位, 即 $\delta_k(\phi) = 0$ 及 $\delta(\phi') = n_k$. 另一方面, 对任意 $\psi \in \mathbb{C}[x, y]$, 根据定义有 $\delta_k(\psi)d_k \leq \deg_y(\psi)$. 由引理 3.2 (除了我们需要证明的不可约性部分), 我们得到

$$\begin{aligned} d_k \delta_k(\phi') &= d_k n_k = d_{k+1} = \deg_y(U_{k+1}) \\ &= \deg_y(\phi) + \deg_y(\phi') \geq \deg_y(\phi') \geq d_k \delta_k(\phi'), \end{aligned}$$

因此 $\deg_y(\phi) = 0$ 且 $\deg_y(\phi') = \deg_y(U_{k+1})$. 由 U_{k+1} 关于 y 的首一性, 知 ϕ 为 R 中单位. Q.E.D.

实际上此时由 Weierstrass 分解定理 我们还可以得出所有 U_k 均在 $R = \mathbb{C}[[x, y]]$ 中也是不可约的.

至此我们完成了对 定理 3.5 的完整证明.

下一次我们考虑给出 定理 3.7 的证明, 以及 定理 3.9 中的构造思路.

参考文献

Favre, C. and Jonsson, M. (2004). The Valuation Tree. vol 1853 Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.