

定理 3.7 及 3.9 的证明

无限的存在亦是为了有限.

利用上节中的对于 定理 3.5 的证明, 我们已经可以通过 有限长度的 SKP 构造出大量的赋值, 但所有如此得到的赋值组成的空间并非一个紧空间, 还需要本节所证明的通过 无限长度的 SKP 构造出的赋值来完成对前述空间的紧化.

定理 3.7 的证明

定理 3.7. 令 $[(U_j); (\tilde{\beta}_j)]$ 为一个无限长度的 SKP. 对任意 $k \geq 1$, 令 v_k 为 定理 3.5 中的关于 $[(U_j)_0^k; (\tilde{\beta}_j)_0^k]$ 的赋值.

- (i) 如果对无穷多个 j 有 $n_j \geq 2$, 则对任意 $\phi \in R$, 存在 $k_0 = k_0(\phi)$ 使得 $v_k(\phi) = v_{k_0}(\phi)$ 对所有 $k \geq k_0$ 成立, 特别地 v_k 收敛于一个赋值 v_∞ .
- (ii) 如果对 $j \gg 1$ 有 $n_j = 1$, 则 U_k 在 R 中收敛于一个不可约的形式幂级数 U_∞ , 且 v_k 收敛于一个赋值 v_∞ . 更精确地说, 如果 U_∞ 整除 $\phi \in R$, 则 $v_k(\phi) \rightarrow \infty$, 否则存在 $k_0(\phi)$ 使得 $v_k(\phi) = v_{k_0}(\phi)$ 对所有 $k \geq k_0 = k_0(\phi)$.

证明. (i) 若对于无穷多个 j 有 $n_j \geq 2$, 那么 $\deg_y(U_{k+1}) = d_{k+1} = \prod_{j=1}^k n_j$ 将随着 k 的增加趋向于无穷. 取 $\phi \in R$, 由 Weierstrass 除法定理, 我们不妨设 $\deg_y(\phi) < \infty$. 对 $k \gg 1$, 有 $\deg_y(\phi) < \deg_y(U_{k+1})$, 从而由 v_k 的构造过程可知 $v_k(\phi) = v_{k+l}(\phi)$ 对所有 $l \geq 1$ 成立. 因此 v_k 收敛到一个赋值 v_∞ 并满足所述性质.

- (ii) 若当 $k \geq K$ 时均有 $n_k = 1$, 令 $d := \max_j \deg_y(U_j)$. 则当 $k \geq K$ 时 $\deg_y(U_{k+1}) = \deg_y(U_k) = d$, 此时由

$$U_{k+1} = U_k - \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}},$$

可知对所有 $j \geq K$ 有 $m_{k,j} = 0$. 因此数列 $\{\tilde{\beta}_k\}_{k \geq K}$ 时一个属于离散格点集 $\sum_{j=0}^K \mathbb{Z} \tilde{\beta}_j$ 中的严格递增列. 因此有 $\tilde{\beta}_k \rightarrow \infty$. 记

$$U_k = y^d + a_{d-1}^k(x)y^{d-1} + \cdots + a_0^k(x),$$

为其 Weierstrass 多项式形式. 注意到由于对所有 $j \geq K$ 有 $m_{k,j} = 0$, 因此

$$a_n^{k+1}(x) = a_n^k(x) - \tilde{\theta}_k \sum a_{i_1}^{j_1}(x) \cdots a_{i_l}^{j_l}(x),$$

其中 $i_1 + \cdots + i_l = n$, $\#\{j_s = \alpha\} = m_{k,\alpha}$. 因此

$$a_n^{k+1}(x) - a_n^k(x) \in \mathfrak{m}^{\sum_{i=0}^K m_{k,i}}.$$

另一方面, 由于 $\tilde{\beta}_j$ 递增趋于无穷, 我们有

$$\sum_{i=0}^K m_{k,i} \geq \tilde{\beta}_K^{-1} \sum_{i=0}^K \tilde{\beta}_i m_{k,i} = \frac{\tilde{\beta}_k}{\tilde{\beta}_K} \rightarrow \infty,$$

这里用到了 $n_j = 1$ 对于 $j \geq K$ 成立, 以及数列 $\tilde{\beta}_k$ 的递推关系式. 从而我们可以得知 $\{U_k\}$ 的每项系数 $a_n^k(x)$ 收敛到某个关于 x 的形式幂级数, 即 U_k 收敛到一个关于 y 的系数为形式幂级数的 d 次多项式 $U_\infty \in \mathbb{C}[[x]][y] \subset \mathbb{C}[[x, y]]$.

回忆

$$U_{k+1} = U_k - \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}, \quad k \geq K+1,$$

其中 $v_{k-1}(U_k) = n_{k-1}\tilde{\beta}_{k-1} = \tilde{\beta}_{k-1}$, 以及

$$v_{k-1}(U_{k+1} - U_k) = \sum_{j=0}^{k-1} m_{k,j}\tilde{\beta}_j = \tilde{\beta}_k > \tilde{\beta}_{k-1}.$$

这意味着 $v_{k-1}(U_{k+1}) = \tilde{\beta}_{k-1}$, 并因此有 $v_{k-1}(U_{k+l}) = \tilde{\beta}_{k-1}$ 对所有 $l \geq 0$ 成立. 即 $v_{k-1}(U_\infty) = \tilde{\beta}_{k-1}$. 故

$$v_\infty(U_\infty) := \lim_k v_k(U_\infty) = \lim_k \tilde{\beta}_k = \infty.$$

更一般地, 对任意 $\phi \in R$, 令 $\phi = \phi_0 + U_\infty \phi_1$, 其中 $\deg_y(\phi_0) < \deg_y(U_\infty) = d$. 若 $\phi_0 \equiv 0$, 我们令

$$v_\infty(\phi) := \lim_k v_k(\phi) = \infty.$$

否则, 对充分大的 $k \geq K$, 以及任意 $l \geq 0$, 有

$$v_{k+l}(\phi) = v_{k+l}(\phi_0) = v_k(\phi_0).$$

因此数列 $v_k(\phi)$ 在 k 充分大后是常值, 即我们同样可以令 $v_\infty := \lim_k v_k(\phi)$.

容易验证上述构造的 v_∞ 确实是一个赋值. 特别地, 有 $v_\infty(\phi) = \infty$ 当且仅当 U_∞ 整除 ϕ . 由此亦可知 U_∞ 在 R 中是不可约的. Q.E.D.

定理 3.9 的构造思路

定理 3.9. 对任意 R 上的 centered 赋值, 存在唯一的 SKP $[(U_j)_0^n; (\tilde{\beta}_j)_0^n]$, $1 \leq n \leq \infty$, 使得 $v = \text{val}[(U_j); (\tilde{\beta}_j)]$. 此时我们有 $v(U_j) = \tilde{\beta}_j$ 对所有 j .

进一步地, 如果 $k < n$ 且 $v_k = \text{val}[(U_j)_0^k; (\tilde{\beta}_j)_0^k]$, 则 $v(\phi) \geq v_k(\phi)$ 对所有 $\phi \in R$ 成立, 并且 $v(\phi) > v_k(\phi)$ 当且仅当在 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中 U_{k+1} 能整除 ϕ .

证明概要. 我们对 k 归纳地构造赋值 v_k 使得 $v_k(U_j) = \tilde{\beta}_j$ 对 $j \leq k$ 成立.

令 $U_0 = x$, $U_1 = y$, 以及 $\tilde{\beta}_0 = v(x)$, $\tilde{\beta}_1 = v(y)$. 假设 $v_k := \text{val}[(U_j)_0^k; (\tilde{\beta}_j)_0^k]$ 已经构造出. 则由定理 3.5, 我们有 $v(\phi) \geq v_k(\phi)$ 对所有 $\phi \in R$ 成立. 由于 $v(x) = v_k(x)$, 这个结果对于所有 $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$ 亦是正确的. 如果完全有 $v = v_k$, 那么所有的工作都结束了. 否则, 令

$$\mathcal{D}_k := \{\phi \in \mathbb{C}(x)[y] \mid v(\phi) > v_k(\phi)\}.$$

容易验证: $\mathcal{D}_k$ 定义了分次环 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 中的一个素理想.

回忆: 分次环 $\text{gr}_{v_k} \mathbb{C}(x)[y]$ 是一个欧几里得整环. 因此 $\mathcal{D}_k$ 由某个不可约元素生成.

可以证明: $\mathcal{D}_k$ 由唯一的形如 $U_{k+1} = U_k^{n_k} - \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$ 的不可约元素生成, 其中 $\theta_k \in \mathbb{C}^*$, $0 \leq m_{k,j} < n_j$ 当 $j \geq 1$, 且 $m_{k,0} \geq 0$.

定义 $\tilde{\beta}_{k+1} := v(U_{k+1})$. 容易验证 $[(U_j)_0^{k+1}; (\tilde{\beta}_j)_0^{k+1}]$ 确实是一个 SKP. 即完成了归纳构造.

最后这个归纳构造过程要么在有限步停止, 要么我们最终会得到一个无限长度的 SKP $[(U_j); (\tilde{\beta}_j)]$. 分别我们均可验证 $v = \text{val}[(U_j); (\tilde{\beta}_j)]$. 其中前一种情况是显然的, 后一种也可以由上述定理 3.7 的证明过程类似得出. Q.E.D.

至此, 我们完成了通过 SKP 来一对一地表示出 $\mathbb{C}[[x, y]]$ 上 centered 赋值空间 $\tilde{\mathcal{V}}$ 中的所有元素的工作. 这将为后面讨论赋值空间的树结构提供可计算基础.

下节我们将开始赋值空间上树结构的证明.

参考文献

Favre, C. and Jonsson, M. (2004). The Valuative Tree. vol 1853 Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.