

## 赋值的重数与逼近序列

赋值重数 (multiplicity of valuation), 重数赋值 (multiplicity valuation), 傻傻分不清楚 ~

### Skewness 续

回顾对任意赋值  $v \in \mathcal{V}$ , 其 skewness 定义为  $\alpha(v) := \sup_{\phi \in \mathfrak{m}} v(\phi)/m(\phi)$ . Skewness 函数  $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow [1, \infty]$  给出了  $\mathcal{V}$  的一个参数化. 若  $v$  为 quasimonomial 赋值, 则  $\alpha(v) < \infty$ ; 若  $v$  为 curve 赋值, 则  $\alpha(v) = \infty$ ; 若  $v$  为 infinitely singular 赋值, 则  $\alpha(v) \in (1, \infty]$ .

**定义 8.1.** 令  $C$  为过原点的一条不可约曲线,  $t \in [1, \infty]$  以及  $v_C \in \mathcal{V}$  为曲线  $C$  对应的 curve 赋值. 定义  $v_{C,t}$  为 segment  $[v_{\mathfrak{m}}, v_C]$  上唯一具有 skewness  $\alpha(v) = t$  的赋值. 若  $C = \{\phi = 0\}$  其中  $\phi \in \mathfrak{m}$  不可约, 亦记  $v_{\phi,t} = v_{C,t}$ .

回忆对于 curve 赋值  $v_C$  与  $v_D$ , 与其相关的极小赋值  $v_C \wedge v_D$  满足: segments  $[v_{\mathfrak{m}}, v_C]$  与  $[v_{\mathfrak{m}}, v_D]$  在  $[v_{\mathfrak{m}}, v_C \wedge v_D]$  段重合, 而在  $v_C \wedge v_D$  后分为两支. 也就是说, 我们有:

$$v_{C,s} = v_{D,t} \Leftrightarrow s = t \leq \alpha(v_C \wedge v_D).$$

假设  $C = \{\phi = 0\}$ ,  $D = \{\psi = 0\}$  其中  $\phi, \psi \in \mathfrak{m}$  不可约, 即  $v_C = v_\phi$ ,  $v_D = v_\psi$ . 则此时由 命题 7.2 可得

$$\alpha(v_\phi \wedge v_\psi) = \frac{v_\phi(\psi)}{m(\psi)} = \frac{\{\phi = 0\} \cdot \{\psi = 0\}}{m(\phi)m(\psi)} = \frac{C \cdot D}{m(C)m(D)}.$$

容易验证这对于一般情形也是对的. 因此综合前述我们有

$$v_{C,s} = v_{D,t} \Leftrightarrow s = t \leq \frac{C \cdot D}{m(C)m(D)}.$$

**推论 8.2.** 设  $v \in \mathcal{V}$ ,  $\phi \in \mathfrak{m}$  不可约. 若  $v(\phi)$  为无理数, 则  $v = v_{\phi,t}$  其中  $t = v(\phi)/m(\phi)$ .

**证明.** 由 命题 7.2,  $\alpha(v \wedge v_\phi) = v(\phi)/m(\phi) = t$ , 即  $v \geq v \wedge v_\phi = v_{\phi,t}$ . 注意到  $\alpha(v_{\phi,t}) = t$  为无理数, 由 定理 7.3 知  $v_{\phi,t}$  为 irrational 赋值, 此时 命题 6.4 告诉我们  $v_{\phi,t}$  为赋值树  $\mathcal{V}$  中正则点 (切向量只有两个), 即如果  $v > v_{\phi,t}$ , 则存在  $s > t$  使得  $v \geq v_{\phi,s}$ . 但此时  $v(\phi) \geq sm(\phi) > tm(\phi)$ , 矛盾. 因此只能有  $v = v_{\phi,t}$ . Q.E.D.

**命题 8.3.** Skewness 函数  $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow [1, \infty]$  为下半连续函数, 但不连续, 关于  $\mathcal{V}$  作为一个树对应的弱拓扑.

**证明.** 实际上对于任意的 rooted nonmetric tree, 可以直接验证其上的参数化都是弱下半连续的. 另一方面, 考虑  $\mathcal{V}$  中赋值列  $v_n = v_{y-nx,2}$ . 我们断言  $v_n \rightarrow v_{\mathfrak{m}}$ , 其中  $v_{\mathfrak{m}}$  为重数赋值. 实际上由树的弱拓扑定义, 这等价于: 对任意  $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_{\mathfrak{m}}\}$ , 以及充分大  $n$ , 有  $v \leq v_n$  不成立. 注意到  $v_{n_i} \wedge v_{n_j} = v_{\mathfrak{m}}$  当  $n_i \neq n_j$ , 即可知断言成立. 此时对任意  $n$  有  $\alpha(v_n) = 2$ , 但  $\alpha(v_{\mathfrak{m}}) = 1$ , 即得  $\alpha$  并非  $\mathcal{V}$  上的 (弱) 连续函数. Q.E.D.

### 赋值的重数

#### 重数

**定义 8.4.** 对任意赋值  $v \in \mathcal{V}$ , 定义  $v$  的重数 (multiplicity) 为

$$m(v) := \min\{m(C) \mid \text{曲线 } C \text{ 不可约, 且 } v_C \geq v\}.$$

若这样的曲线  $C$  不存在, 则定义  $m(v) = \infty$ .

1.  $m(v_C) = m(C)$ , 其中 (形式) 曲线  $C$  不可约;
2. 这个赋值重数的定义实际上为满足上述  $m(v_C) = m(C)$  的最大的递增函数  $m : \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_+$ .
3. 显然  $m(v_m) = 1$ .

**引理 8.5.** 设  $v \in \mathcal{V}$ , 取局部坐标  $(x, y)$  使  $1 = v(x) \leq v(y)$ . 若  $v = \text{val}[(U_j)_0^k; (\tilde{\beta}_j)_0^k]$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , 则  $m(v) = \sup_j \deg_y(U_j)$ .

**证明.** 注意到  $U_j$  关于  $y$  不可约, 即  $m(U_j) = d_j = \deg_y(U_j)$ , 从而由引理 6.2 可知此结论成立. Q.E.D.

**命题 8.6.** 若  $w \leq v$ , 则  $m(w)$  整除  $m(v)$ . 进一步地,

- (i)  $m(v) = \infty$  当且仅当  $v$  是 infinitely singular 赋值;
- (ii)  $m(v) = 1$  当且仅当在某个局部坐标  $(x, y)$  下  $v$  是 monomial 赋值.

**证明.** 设  $w \leq v$ . 利用 SKP 将这两个赋值分别写作:  $v = \text{val}[(U_j)_0^k; (\tilde{\beta}_j)_0^k]$ ,  $w = \text{val}[(U'_j)_0^{k'}; (\tilde{\beta}'_j)_0^{k'}]$ . 则由引理 6.2 知  $k' \leq k$ ,  $U_j = U'_j$  当  $0 \leq j \leq k'$ , 且  $\tilde{\beta}'_{k'} \leq \tilde{\beta}_{k'}$ . 从而由引理 8.5 我们有  $m(w) = \prod_{j=0}^{k'-1} n_j$  以及  $m(v) = \prod_{j=0}^{k-1} n_j$ , 即得  $m(w)$  整除  $m(v)$ .

由定义 3.8 及引理 8.5 立即得  $m(v) = \infty$  当且仅当  $v$  为 infinitely singular 赋值.

若  $v$  为 monomial, 则  $v \leq v_x$  或  $v \leq v_y$ , 即  $m(v) = 1$ . 反过来, 若  $m(v) = 1$ , 则由定义, 存在不可约形式曲线  $C$  满足  $m(C) = 1$  使得  $v_C \geq v$ . 取局部坐标  $(x, y)$  使得  $C = \{y = 0\}$ , 即  $v_C = v_y$ . 令  $v_t$  为坐标  $(x, y)$  下的 monomial 赋值, 满足  $v_t(x) = 1$ ,  $v_t(y) = t$ . 则  $v_t \leq v_y$  且  $\alpha(v_t) = t$ , 即  $v_t = v_{y,t}$ . 由此可知 segment  $[v_m, v_y]$  上的所有赋值都是 monomial 赋值. 特别地  $v$  是 monomial 赋值. Q.E.D.

**命题 8.7.** 重数函数  $m : \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_+$  下半连续, 但不是连续的.

**证明.** 关于不连续部分, 可以取  $v_n := v_{(y+nx)^2+x^3}$  作为反例. 此时有  $v_n \rightarrow v_m$ , 但  $m(v_n) = 2$ ,  $m(v_m) = 1$ . Q.E.D.

## 广义重数

对于赋值  $w \in \mathcal{V}$  处的切向量  $\vec{v}$ , 定义重数  $m(\vec{v})$  如下: 若  $\vec{v}$  所对应等价类中包含  $v_m$ , 则  $m(\vec{v}) := m(w)$ ; 否则  $m(\vec{v})$  定义为等价类中所有 curve 赋值  $v_C$  的重数的最小值.

**命题 8.8.** 令  $w \in \mathcal{V}$  为一个 divisorial 赋值. 则存在一个可被  $m(w)$  整除的正整数  $b(w)$  使得下述其中之一成立:

- (i) 所有  $w$  处的切向量拥有同样的重数  $m(w)$ ; 此时令  $b(w) = m(w)$ ;
- (ii) 在所有  $w$  处的切向量中, 恰有两个的重数为  $m(w)$ , 其中一个为由  $v_m$  所代表的切向量; 而所有其他的切向量拥有一个共同的重数  $b(w) > m(w)$ .

**证明**可以参照上面的方法, 利用引理 8.5 及引理 6.2 来计算, 这里不再赘述. 特别地, 对于第 (ii) 种情形, 可以发现  $b(w) = n_k \deg_y(U_k)$ .

**定义 8.9.** 称如上的  $b(w)$  为赋值  $w$  的广义重数 (generic multiplicity).

## 逼近序列

由命题 8.6, 8.7, 8.8 立即得:

**命题 8.10.** 对任意  $v \in \mathcal{V}$ , 若  $m(v) < \infty$ , 则存在一个 divisorial 赋值的有限序列  $v_i$ , 以及一个严格递增的整数列  $m_i$ , 使得

$$v_m = v_0 < v_1 < \cdots < v_g < v_{g+1} = v$$

以及  $m(w) = m_i$  对所有  $w \in (v_{i-1}, v_i]$ ,  $1 \leq i \leq g+1$ . 更进一步地,  $m_1 = 1$ ,  $m_i$  整除  $m_{i+1}$ , 且  $v_i$  的广义重数  $b(v_i) = m_{i+1}$ .

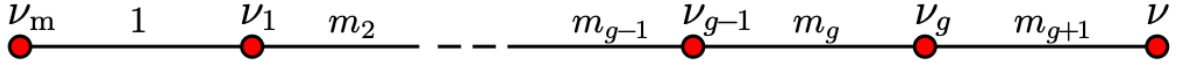


Figure 1: Approximating sequence

**定义 8.11.** 称如上的序列  $(v_i)_{i=0}^g$  为赋值  $v$  的逼近序列 (**approximating sequence**). 逼近序列的概念可自然地延拓至 infinitely singular 赋值, 此时序列会是个无限序列.

下一节, 我们将用赋值重数及逼近序列的概念来定义 Thinness 函数, 此函数将会给出  $v$  的另一个参数化.

## 参考文献

Favre, C. and Jonsson, M. (2004). The Valuative Tree. vol 1853 Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.