

赋值树理论简介 09

虽然我们这里叫它 thinness, 但未来我们会叫它 log discrepancy. 就像当初叫小甜甜, 现在叫牛夫人.

Thinness

定义 9.1. 对任意赋值 $v \in \mathcal{V}$, 定义它的 **thinness** 为

$$A(v) := 2 + \int_{v_m}^v m(w) d\alpha(w).$$

即若 $(v_i)_0^g$ 为 v 的逼近序列 (approximating sequence), 其中 $v_{g+1} = v$, 则

$$A(v) := 2 + \sum_{i=1}^{g+1} m_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}),$$

其中 $\alpha_i = \alpha(v_i)$.

若 v 为 infinitely singular 赋值, 即 $g = \infty$, 上述求和为一个无穷求和, $A(v)$ 同样定义.

命题 9.2. Thinness 定义了赋值树 $\mathcal{V}$ 上的一个参数化 $A : \mathcal{V} \rightarrow [2, \infty]$. 进一步地:

- (i) 若 v 为 divisorial 赋值, 则 $A(v)$ 为有理数;
- (ii) 若 v 为 irrational 赋值, 则 $A(v)$ 为无理数;
- (iii) 若 v 为 curve 赋值, 则 $A(v) = \infty$; (iv) 若 v 为 infinitely singular 赋值, 则 $A(v) \in (2, \infty]$.

证明. 由定理 7.3 及定义 9.1 立即可得. Q.E.D.

命题 9.3. Thinness $A : \mathcal{V} \rightarrow [2, \infty]$ 关于 $\mathcal{V}$ 上弱拓扑是下半连续的, 但不是连续的.

证明. 类似于命题 8.3 的证明即可得. Q.E.D.

命题 9.4. 对任意 $v \in \mathcal{V}$, 有 $A(v) \geq 1 + \alpha(v)$, 且等号当且仅当 $m(v) = 1$ 时 (即 v 在某个局部坐标下是 monomial 赋值) 成立.

证明. 注意到在逼近序列中所有 $m_i \geq 1$, 因此 $A(v) \geq 2 + \sum(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = 1 + \alpha(v)$. 等号成立当且仅当所有 $m_i = 1$, 此时 $g = 0$, $m(v) = m_1 = 1$. Q.E.D.

命题 9.5. 若 $m(v) > 1$, 则 $A(v) < m(v)\alpha(v)$.

证明. 同样取 v 的逼近序列 $(v_i)_0^g$, 则有

$$\begin{aligned} A(v) - m(v)\alpha(v) &= 2 + \sum m_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - m_{g+1}(\sum(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + 1) \\ &\leq 1 - (m_{g+1} - 1)\alpha_1 < 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

命题 9.6. 若 $v \in \mathcal{V}$ 为 infinitely singular 赋值, 则当 $w \in [v_m, v)$ 并且 $w \rightarrow v$ 时, 有 $A(w) - m(w)\alpha(w) \rightarrow -\infty$.

证明. 取 v 的逼近序列 $(v_i)_0^\infty$, 由上面命题 9.5 的证明, 我们知当 $m(w) > 1$ 时有 $A(w) - m(w)\alpha(w) \leq 1 - (m(w) - 1)\alpha(v_1)$, 其中当 $w \rightarrow v$ 时, 由命题 8.6 有 $m(w) \rightarrow \infty$, 因此 $A(w) - m(w)\alpha(w) \rightarrow -\infty$. Q.E.D.

特征区域

假设 $v \in \mathcal{V}$ 为一个 quasimonomial 赋值, 记 $v = v_{\phi, t}$, 其中 $m(\phi) = m(v)$. 设局部坐标 (x, y) 使得 $v_x \wedge v_\phi = v_m$.

定义 9.7. 对于较小的 $r > 0$, 定义区域

$$\Omega(r) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < 2, |\phi(x, y)| < |x|^{tm(\phi)}\},$$

称 $\Omega(r)$ 为赋值 v 的特征区域 (characteristic region).

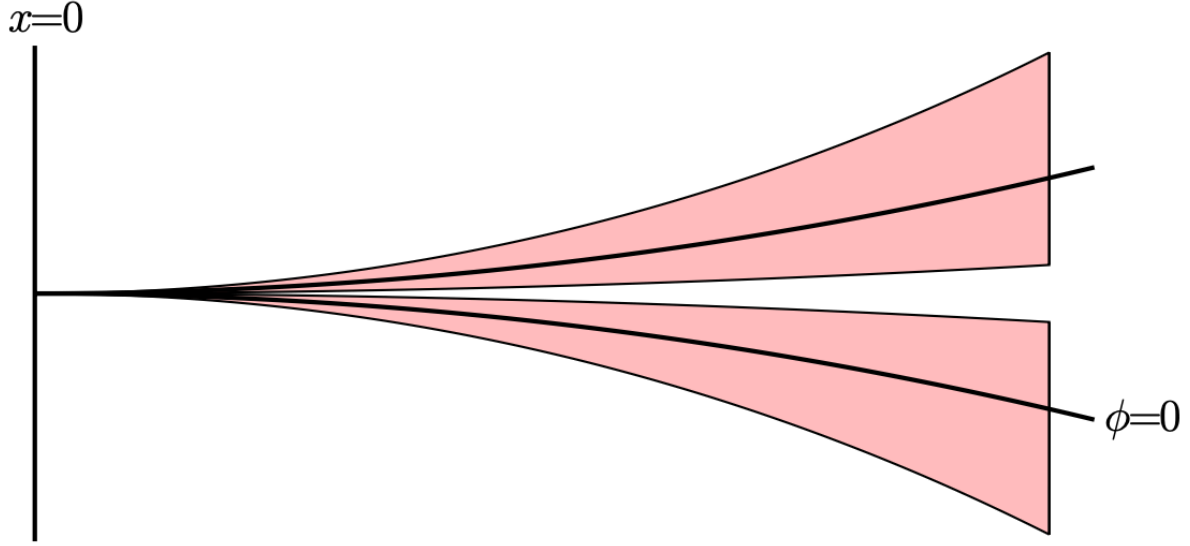


Figure 1: Characteristic region

注意到

$$\text{Vol}(\Omega_r) \sim r^{2A(v)}, \quad \text{当 } r \rightarrow 0.$$

这就是 $A(v)$ 的名字 thinness 的由来. 由特征区域可以定义赋值在多次调和函数 (plurisubharmonic function) 上的作用, 当然实际上也可以反过来利用多次调和函数在特征区域上的广义 Kiselman 数来刻画赋值. 这些内容将在之后的内容中予以介绍.

参考文献

Favre, C. and Jonsson, M. (2004). The Valuative Tree. vol 1853 Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.