

赋值树理论简介 10

本节我们利用逼近序列 (approximating sequence) 来计算一个赋值的值域, 即 value semigroup.

Value semigroup

记 $R^* = R \setminus \{0\}$, 以及 $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$.

命题 10.1. 令 $v \in \mathcal{V}$, 以及 $(v_i)_0^g$ 为 v 的逼近序列 (这里 g 可能为无穷). 则 value semigroup, 定义为 $v(R^*)$, 由如下给出

$$v(R^*) = \sum_{i=0}^{g+1} m_i \alpha_i \mathbb{N},$$

其中 $v_{g+1} = v$ 若 $g < \infty$, $\alpha_i = \alpha(v_i)$ 以及 $m_i = m(v_i)$.

对于某个 $v \in \mathcal{V}$, 取局部坐标 (x, y) 使得 $v(y) \geq v(x) = 1$. 我们将 v 用 SKP 表示出来: 设 $v = \text{val}[(U_j)_0^k; (\tilde{\beta}_j)_0^k]$, 其中 $\tilde{\beta}_1 \geq \tilde{\beta}_0 = 1$. 记 $d_j = \deg_y(U_j)$. 回忆

$$n_j = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \tilde{\beta}_j \in \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\beta}_i \mathbb{Z} \right\},$$

且 $d_k = \prod_{j=0}^k n_j$. 定义数列 $(k_j)_{j=0}^{g+1}$ 满足: $k_0 = 0$, $n_{k_i} \geq 2$, 以及 $n_j = 1$ 当 $k_i < j < k_{i+1}$.

此时根据逼近序列的定义可知其中每个

$$v_i = \text{val}[(U_j)_0^{k_i}; (\tilde{\beta}_j)_0^{k_i}]$$

其中 $m(v_i) = d_{k_i}$. - 由引理 7.6 得 $\alpha_i = \alpha(v_i) = \tilde{\beta}_{k_i}/d_{k_i}$. - 由于 m_{i+1} 为 v_i 的广义重数, 因此若 v 是 divisorial 的, 有 $b(v) = d_k n_k = \prod_{j=1}^k n_j$.

命题 10.1 的证明. 由 SKP 所对应的赋值的构造过程可以看出

$$v(R^*) = \sum_{j=0}^k \tilde{\beta}_j \mathbb{N}.$$

但是当 $k_i < j < k_{i+1}$ 时, 有 $n_j = 1$, 即 $\tilde{\beta}_j \in \sum_{j' < j} \tilde{\beta}_{j'} \mathbb{N}$. 从而

$$v(R^*) = \sum_{i=0}^{g+1} \tilde{\beta}_{k_i} \mathbb{N} = \sum_{i=0}^{g+1} m_i \alpha_i \mathbb{N}.$$

Q.E.D.

广义重数

命题 10.2. 假设 $v \in \mathcal{V}$ 为 divisorial 赋值, 其逼近序列为 $(v_i)_0^g$. 记 $\alpha_i = \alpha(v_i)$. 则 v 的广义重数由如下给出:

$$\begin{aligned} b(v) &= \inf \left\{ b \in m\mathbb{N} \mid b\alpha \in \sum_{i=0}^g m_i \alpha_i \mathbb{N} \right\} \\ &= \inf \left\{ b \in m\mathbb{N} \mid b\alpha \in \sum_{i=0}^g m_i \alpha_i \mathbb{Z} \right\}, \end{aligned}$$

其中 $m = m(v)$, $\alpha = \alpha(v)$, 以及 $m_0 = 1$.

证明. 由上述, 有 $b(v) = n_k d_k$, 其中 $n_k = \min\{a \in \mathbb{N} \mid a\tilde{\beta}_j \in \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j \mathbb{Z}\}$. 同上, 我们有 $\sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^g m_i \alpha_i \mathbb{Z}$. 此时, 由 $\tilde{\beta}_k = m\alpha$ 以及 $d_k = m$ 即得

$$b(v) = \min \left\{ b \in m\mathbb{N} \mid b\alpha \in \sum_{i=0}^g m_i \alpha_i \mathbb{Z} \right\}.$$

最后, 由引理 3.4 知其中的 $\mathbb{Z}$ 也可以替换为 $\mathbb{N}$. Q.E.D.

命题 10.3. 令 $v \in \mathcal{V}$ 为一赋值. 则:

- (i) 若 v 为 curve 赋值, 其重数 $m(v) = m$, 则 $v(R^*) \subset m^{-1}\overline{\mathbb{N}}$; 进一步地, 若 $a \in \mathbb{N}$, 则 $a \cdot v(R^*) \subset \overline{\mathbb{N}}$ 当且仅当 $m \mid a$;
- (ii) 若 v 为 divisorial 赋值, 其广义重数为 $b(v) = b$, 则 $v(R^*) \subset b^{-1}\mathbb{N}$; 进一步地, 若 $a \in \mathbb{N}$, 则 $a \cdot v(R^*) \subset \mathbb{N}$ 当且仅当 $m \mid a$;
- (iii) 若 v 为 irrational 赋值, 其重数 $m(v) = m$ 且 skewness $\alpha(v) = \alpha$, 则 $v(R^*) \subset \mathbb{Q} + m\alpha\mathbb{N}$ 但 $v(R^*) \not\subset \mathbb{Q}$; 进一步地, 若 $a \in \mathbb{N}$, 则 $a \cdot v(R^*) \subset \mathbb{N} + \alpha\mathbb{N}$ 当且仅当 $m \mid a$;
- (iv) 若 v 为 infinitely singular 赋值, 则 $v(R^*)$ 且非有限生成的.

证明. 首先证明 (ii), 假设 v 为 divisorial 赋值. 此时 $k < \infty$. 令 $a = \min\{a \in \mathbb{N} \mid a \cdot v(R^*) \subset \mathbb{N}\}$. 我们需要证明 $a = b(v)$. 由 $v(R^*) = \sum_{j=0}^k \tilde{\beta}_j \mathbb{N}$, 记 $\tilde{\beta}_j = r_j/s_j$, 其中整数 r_j, s_j 互素, 记 $S_j = \text{lcm}(s_0, s_1, \dots, s_j)$. 则 $S_0 = 1, a = S_k^{-1}$. 显然 $\sum_{j'=0}^j \tilde{\beta}_{j'} \mathbb{Z} = S_j^{-1} \mathbb{Z}$. 由于 $b(v) = \prod_{j=1}^k n_j$, 因此我们只需证 $n_j = S_j/S_{j-1}, 1 \leq j \leq k$. 实际上

$$\begin{aligned} n_j &= \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n\tilde{\beta}_j \in \sum_{j'=0}^{j-1} \tilde{\beta}_{j'} \mathbb{Z} \right\} \\ &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid n\tilde{\beta}_j \in S_{j-1}^{-1} \mathbb{Z} \} \\ &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid nr_j S_{j-1} \in s_j \mathbb{Z} \} \\ &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid nS_{j-1} \in s_j \mathbb{Z} \} \\ &= \text{lcm}(s_j, S_{j-1})/S_{j-1} = S_j/S_{j-1}. \end{aligned}$$

接着证明 (i). 假设 v 为 curve 赋值, 令 $(v_i)_0^g$ 为 v 的逼近序列. 则由命题 10.1, $v(R^*) = v_g(R^*) \cup \{\infty\}$. 由于 v_g 为 divisorial 赋值, 且广义重数 $b(v_g) = m(v)$, 由 (ii) 即得 (i).

对于 (iii), 假设 v 为 irrational 赋值, 令 $(v_i)_0^g$ 为 v 的逼近序列. 则由命题 10.1, $v(R^*) = v_g(R^*) + m\alpha\mathbb{N}$. 由于 v_g 为 divisorial 赋值, 因此 $v(R^*) \subset \mathbb{Q} + m\alpha\mathbb{N}$, 且由 $\alpha \notin \mathbb{Q}$ 知 $v(R^*) \not\subset \mathbb{Q}$. 对任意 $a \in \mathbb{N}$, 有 $a \cdot v(R^*) \subset \mathbb{N} + \alpha\mathbb{N}$ 当且仅当 $a \cdot v_g(R^*) \subset \mathbb{N}$, 而由 (ii) 知这当且仅当 $b(v_g) = m(v)$ 整除 a .

最后证明 (iv). 假设 v 为 infinitely singular 赋值, 令 $(v_i)_0^\infty$ 为 v 的逼近序列. 则由于所有 $\alpha(v_i) \in \mathbb{Q}$, 根据命题 10.1 有 $v(R^*) \subset \mathbb{Q}$. 另一方面, 假设 $v(R^*)$ 是有限生成的, 则存在 $b \in \mathbb{N}$ 使得 $b \cdot v(R^*) \subset \mathbb{N}$. 则此时必有 $b \cdot v_i(R^*) \subset \mathbb{N}$ 对所有 i 成立. 但由 (ii) 知这会导致所有 $b_i \mid b$, 这与当 $i \rightarrow \infty$ 时有 $b_i \rightarrow \infty$ 矛盾. Q.E.D.

本节结束后, 我们对于赋值树的基本理论大体上介绍完毕了. 虽然还有例如 使用 Puiseux 展开构造赋值 等理论是必须涉及的, 但是也很有必要在这里先给出一些赋值树理论的应用, 以避免过分空中楼阁和枯燥. 我将选择主要介绍赋值树在 乘子理想 等方面的应用.

当然实际上下一节更可能是一个拾遗篇, 包含一些之前所遗漏的但有必要介绍的内容.

参考文献

Favre, C. and Jonsson, M. (2004). The Valuative Tree. vol 1853 Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.