

赋值树理论简介 12

“乘子理想”这个名字是多复变在代数几何里留下的印记之一.

本节中, 我们继续令 $R = \mathbb{C}[[x, y]]$, 以及记 $\mathcal{V}$ 为 R 上所有 normalized centered 赋值全体.

同时, 我们记 $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ 为 $\mathcal{V}$ 中所有 quasimonomial 赋值全体. 注意到对任意 $v \in \mathcal{V}$, 有 $v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}$ 等价于 $m(v) < \infty$ 且 $A(v) < \infty$ (后一条件也可换成 $\alpha(v) < \infty$).

乘子理想

定义 12.1. 对 R 中理想 I 以及实数 $c > 0$, 定义 I 的关于指数 c 的 乘子理想 (**multiplier ideal**) $\mathcal{J}(I^c)$ 为包含满足下述条件的所有 $\psi \in R$ 全体组成的理想:

$$\sup_{v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}} \frac{v(I)}{A(v) + v(\psi)} < \frac{1}{c}.$$

回忆对任意 R 中理想 I , 其上任意赋值 v 在 I 上的取值定义为: $v(I) := \min_{\phi \in I} v(\phi)$.

我们有时候也将 $\mathcal{J}(I^c)$ 记为 $\mathcal{J}(c \cdot I)$.

定义 12.2. 对 R 中理想 I , 定义 I 的 对数典范阈值 (**lct, log canonical threshold**) 为

$$\text{lct}(I) := \sup\{c \geq 0 \mid \mathcal{J}(I^c) = R\}.$$

更一般地, 对任意 $\phi \in R$, 定义理想 I 关于 ϕ 的 跳跃数 (**jumping number**) 为

$$\text{lct}^\phi(I) := \sup\{c \geq 0 \mid \phi \in \mathcal{J}(I^c)\}.$$

- 注意到, 若 $c = \text{lct}^\phi(I) > 0$, 则由定义可知 $\phi \notin \mathcal{J}(I^c)$. 特别地, 我们有 $\mathcal{J}(\text{lct}(I) \cdot I) \subsetneq R$.
- 由定义可知

$$\text{lct}^\phi(I) = \inf_{v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}} \frac{A(v) + v(\phi)}{v(I)},$$

特别地,

$$\text{lct}(I) = \inf_{v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}} \frac{A(v)}{v(I)}.$$

- 由于 $\mathcal{V}_{\text{div}}$ (全体 divisorial 赋值组成的集合) 在 $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ 中的稠密性, 以及所涉及函数 (在 segment 上的) 的连续性, 可知上述定义和等式中的 $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ 均可替换为 $\mathcal{V}_{\text{div}}$.
- 由于对任意赋值 v , 有 $v(I) = v(\bar{I})$, 其中 $\bar{I}$ 为 I 的 整闭包, 可知乘子理想 $\mathcal{J}(I^c)$ 均为 整闭理想.
- 显然 $I \subset \bar{I} \subset \mathcal{J}(I)$.

分次理想列与次可加理想列

定义 12.3. 称 R 中的非零理想列 $I_\bullet = (I_k)_{k \geq 1}$ 为一个 分次理想列 (**graded sequence of ideals**), 如果

$$I_k I_l \subset I_{k+l}, \quad \forall k, l \geq 1.$$

约定 $I_0 = R$.

- 例. 设 v 为 R 上赋值, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $\mathfrak{a}_k(v) := \{v \geq k\}$, 则 $\mathfrak{a}_\bullet(v)$ 为 R 中的一个 graded sequence.

命题 · 定义 12.4. 若 $I_\bullet$ 为一个 graded sequence of ideals, 则理想列 $(\mathcal{J}(I_k^{c/k}))_{k \geq 1}$ 中有唯一的一个最大元, 称为 $I_\bullet$ 的关于指数 c 的渐近乘子理想 (**asymptotic multiplier ideal**).

证明. 参见 [3, Lemma 11.1.14]. 注意到对任意 $k, p \geq 1$ 以及 $v \in \mathcal{V}$, 有 $v(I_{pk}) \leq v(I_p) \cdot k$, 因此

$$\frac{v(I_p)}{A(v) + v(\psi)} < \frac{p}{c} \implies \frac{v(I_{pk})}{A(v) + v(\psi)} < \frac{pk}{c},$$

即

$$\mathcal{J}\left(\frac{c}{p} \cdot I_p\right) \subset \mathcal{J}\left(\frac{c}{pk} \cdot I_{pk}\right).$$

此时由 R 的诺特性即得最大元的存在唯一性. Q.E.D.

定义 12.5. 定义一个 graded sequence of ideals $I_\bullet$ 的 **log canonical threshold** 为 $\text{lct}(I_\bullet) := \sup\{c \geq 0 \mid \mathcal{J}(I_\bullet^c) = R\}$, 同样定义某个元素 $\phi \in R$ 关于 $I_\bullet$ 的 **jumping number** 为 $\text{lct}^\phi(I_\bullet) := \sup\{c \geq 0 \mid \phi \in \mathcal{J}(I_\bullet^c)\}$.

- 注意到, 若 $I_\bullet$ 满足 $I_k := I^{k+k_0}$ 对某个理想 $I \subset R$ 以及 $k_0 \in \mathbb{N}$, 则 $\mathcal{J}(I_\bullet^c) = \mathcal{J}(I^c)$, 同时 $\text{lct}(I_\bullet) = \text{lct}(I)$, $\text{lct}^\phi(I_\bullet) = \text{lct}^\phi(I)$.
- 同样我们有

$$\text{lct}^\phi(I_\bullet) = \inf_{v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}} \frac{A(v) + v(\phi)}{v(I_\bullet)}, \quad (12.1)$$

其中 $v(I_\bullet) := \lim_{k \rightarrow \infty} v(I_k)/k = \sup_k v(I_k)/k$ (这里是良定的由于 $v(I_{k+l}) \leq v(I_k) + v(I_l)$ 对任意 k, l 成立).

如果熟知多复变的话, 这里所定义的乘子理想相比于关于某个多次调和函数 Φ 的乘子理想 $\mathcal{J}(\Phi)$, 更类似于关于这个多次调和函数的渐近乘子理想 $\mathcal{J}_+(\Phi) := \bigcup_{p \geq 1} \mathcal{J}(p\Phi)$, 虽然实际上相当不平凡的乘子理想层的强开性定理 (关-周) 告诉我们这两者是一样的.

计算跳跃数的赋值

我们将证明在跳跃数的计算公式, 即 (12.1) 式, 中的下确界实际上等价于在整个 $\mathcal{V}$ 中考虑对应的下确界, 且此时该下确界会被某个 quasimonomial 赋值或者 curve 赋值取到. 我们将会称取到该下确界的赋值为计算该跳跃数的赋值.

引理 12.6. 令 $\psi \in R$, 以及 $w \in \mathcal{V}$. 考虑 $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ 上的函数

$$\chi(v) = \frac{\alpha(w \wedge v)}{A(v) + v(\psi)},$$

则 χ 在 $\mathcal{V}$ 中的每个 segment 上是连续的, 且 χ 在 $\mathcal{V}$ 上 (沿每个 segment) 连续延拓后的上确界在某个 quasimonomial 赋值或者 curve 赋值 v_* 处取到. 特别地,

- (i) 若 $\psi \notin \mathfrak{m}$, 则 v_* 可取为具有重数 1 的赋值;
- (ii) 若 $w = v_\phi$ 其中 $\phi \in \mathfrak{m}$ 不可约, 则 v_* 可取为 v_ϕ 的逼近序列中的赋值.

证明. 参见 [1, Lemma 2.11]. 设 v_∞ 为 $\mathcal{V}$ 的某个 end, 即 v_0 为一个 curve 赋值或者 infinitely singular 赋值. 考虑 χ 在 segment $[v_m, v_\infty]$ 上的取值, 这等价于考虑一个一元实变量函数. 由于 $\alpha(w \wedge v), v(\psi)$ 以及 $A(v)$ 在这个 segment 上都是连续的, 因此 χ 在其上也是连续的. 由此我们可以将 χ 延拓为整个 $\mathcal{V}$ 上的函数.

注意到, 由 $\alpha(w \wedge v), v(\psi)$ 关于 v 的连续性以及 $A(v)$ 关于 v 的下半连续性, 知 $\chi(v)$ 在 $\mathcal{V}$ 上是上半连续的, 因此 χ 在 $\mathcal{V}$ 上的上确界必定在某个赋值 $v_* \in \mathcal{V}$ 处取到. 我们证明 v_* 必定不为一个 infinitely singular 赋值.

考虑 χ 在 segment $[v_m, v_\infty]$ 上的取值, 其中 v_∞ 为某个 infinitely singular 赋值. 令 $v_t \in (v_m, v_\infty)$ 满足 $t = \alpha(v_t) \in (1, \alpha(v_\infty))$. 记 $m(t) := m(v_t)$, $A(t) := A(v_t)$ 以及 $\chi(t) := \chi(v_t)$. 则由 thinness 定义可知左导数 $\chi'_-(t) = m(t) \cdot t$.

(a). 若 $w \neq v_\infty$, 则对于充分接近 $\alpha(v_\infty)$ 的 t , 有 $\alpha(w \wedge v_t)$ 与 $v_t(\psi)$ 均为常数, 即

$$\chi'_-(t) = -\frac{\alpha(w \wedge v_\infty) \cdot m(t) \cdot t}{(A(t) + v_t(\psi))^2} < 0.$$

(b). 若 $w = v_\infty$, 则对于充分接近 $\alpha(v_\infty)$ 的 t , 有 $\alpha(w \wedge v_t) = t$ 以及 $v_t = C$ 为某个常数, 从而

$$\chi'_-(t) = \frac{A(t) + C - m(t) \cdot t}{(A(t) + v_t(\psi))^2},$$

回忆当 $v_t \rightarrow v_\infty$ 时有 $A(v_t) - m(v_t)\alpha(v_t) \rightarrow -\infty$ (命题 9.6), 因此当 t 充分接近 $\alpha(v_\infty)$, 总有 $\chi'_-(t) < 0$.

综上 $\chi(v)$ 在 $v \in [v_m, v_\infty)$ 充分接近 v_∞ 时总是严格单调递减的, 从而 $\chi(v)$ 不可能在 v_∞ 处取得其上确界. 故前述 v_* 不可能是一个 infinitely singular 赋值. 因此 v_* 必定为某个 quasimonomial 赋值或者 curve 赋值.

假设 $\psi \notin \mathfrak{m}$, 即 $v(\psi) = 0$ 对任意 $v \in \mathcal{V}$. 考虑任意 $\bar{v} \in \mathcal{V}$ 满足 $1 < m(\bar{v}) < \infty$. 取 $\bar{v}$ 的逼近序列中的 v_1 , 即 $m(v_1) = 1$, 且 $m(v) > 1$ 对所有 $v \in (v_1, \bar{v})$. 类似于上考虑函数 $\chi(t)$, 此时 $\chi(t) = \alpha(w \wedge v_t)/A(t)$, 有

$$\begin{aligned} \chi'_-(t) &= \frac{\alpha'(w \wedge v_t)A(t) - \alpha(w \wedge v_t)m(t)t}{A(t)^2} \\ &\leq \frac{A(t) - m(t)t}{A(t)^2} < 0, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式是因为当 $m(v) > 1$ 时有 $A(v) < m(v)\alpha(v)$ (命题 9.5). 因此 $v_* \neq \bar{v}$, 即 $\psi \notin \mathfrak{m}$ 时 v_* 必定位于子树 $\{v \in \mathcal{V} \mid m(v) = 1\}$ 中.

假设 $w = v_\phi$, 其中 $\phi \in \mathfrak{m}$ 不可约. 首先证明 v_* 位于 segment $[v_m, v_\phi]$ 中, 否则取 $v = v_* \wedge v_\phi$, 有 $\alpha(v_\phi \wedge v_*) = \alpha(v_\phi \wedge v)$, 以及 $A(v_*) > A(v)$ 和 $v_*(\psi) \geq v(\psi)$, 因此 $\chi(v_*) < \chi(v)$, 矛盾. 其次, 考虑类似于上的函数 $\chi(t)$, 有

$$\chi(t) = \frac{t}{A(t) + \min\{C, Mt\}},$$

其中 $M = m(\psi)$, $C = v_\phi(\psi)$. 设 $(v_i)_0^\infty$ 为 v_ϕ 的逼近序列. 在 $[v_i, v_{i+1}]$ 中分别讨论可知 $\chi(t)$ 的最大值必定可以在每个区间端点处取到. 综上 $w = v_\phi$ 时, v_* 可以取为 v_ϕ 的逼近序列中的赋值. Q.E.D.

- 例. 设 $w = v_\phi$ 为关于某个不可约 $\phi \in \mathfrak{m}$ 的 curve 赋值, 以及 $\psi = 1$. 则 $\chi(v) = \alpha(v \wedge v_\phi)/A(v)$ 的上确界在 v_ϕ 的逼近序列 $(v_i)_0^g$ 中的 v_1 项取到, 其中 $m(v_1) = 1$. 由此得

$$\text{lct}(\phi) = (\sup_v \chi(v))^{-1} \cdot m(\phi) = \frac{A(v_1)}{\alpha(v_1)} m(\phi) = \left(1 + \frac{1}{\alpha(v_1)}\right) m(\phi).$$

特别地, 下面的不等式成立:

$$m(\phi) \leq \text{lct}(\phi) \leq 2m(\phi).$$

并且, 左边的不等式的等号成立当且仅当 $v_1 = v_\phi$, 即 $m(\phi) = 1$; 右边的不等式的等号成立当且仅当 $v_1 = v_m$, 即 $\alpha(v_\phi \wedge v_\psi) = 1$ 对任意 $m(\psi) = 1$, 这等价于 $\dim_{\mathbb{C}} R/(\phi, \psi) = m(\phi)$ 对所有不可约 $\psi \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 成立. 此外, 容易验证上面的不等式在 ϕ 不必是不可约时也是保持成立的.

引理 12.7. 令 $v, w \in \mathcal{V}$. 则

$$\frac{\alpha(v \wedge w)}{\alpha(w)} = \inf_{\phi \in \mathfrak{m} \text{ 不可约}} \frac{v(\phi)}{w(\phi)} = v(a_*(w)).$$

证明. 先证第一个等式. 我们需要证明, 对任意 $\phi \in \mathfrak{m}$ 不可约, 下述不等式成立:

$$\frac{\alpha(v \wedge w)}{\alpha(w)} \leq \frac{v(\phi)}{w(\phi)} = \frac{\alpha(v \wedge v_\phi)m(\phi)}{\alpha(w \wedge v_\phi)m(\phi)} = \frac{\alpha(v \wedge v_\phi)}{\alpha(w \wedge v_\phi)},$$

且存在 ϕ 使得两者充分接近. 由于 $v(\mathfrak{m}) = w(\mathfrak{m}) = 1$, 我们只需考虑那些 ϕ 满足 $\alpha(v \wedge v_\phi) < \alpha(w \wedge v_\phi)$, 即 $w \wedge v_\phi > v \wedge w$ 时. 此时均有 $v \wedge v_\phi = v \wedge w$. 若 $v_\phi \geq w$, 则 $w \wedge v_\phi = w$, 欲证不等式取等号; 否则 $\alpha(w \wedge v_\phi) < \alpha(w)$, 此时欲证不等式亦成立, 且当 $w \wedge v_\phi$ 逼近 w 时, 两者也会充分接近. 综上实际上可以看出该不等式不仅成立, 且欲证的下确界性质也是成立的.

关于第二个等式, 实际上同 [2, Lemma 2.4], 通过基本的代入定义验证可知

$$v(a_*(w)) = \inf_{\mathfrak{b} \subset R \text{ 理想}} \frac{v(\mathfrak{b})}{w(\mathfrak{b})}.$$

而实际上在上面的证明中我们也可以看出下面的等式成立:

$$\frac{\alpha(v \wedge w)}{\alpha(w)} = \inf_{\psi \in \mathfrak{m}} \frac{v(\psi)}{w(\psi)} = \inf_{\mathfrak{b} \text{ 理想}} \frac{v(\mathfrak{b})}{w(\mathfrak{b})}.$$

Q.E.D.

推论 12.8. 令 $\psi \in R$, 以及 $w \in \mathcal{V}$. 则存在某个 quasimonomial 赋值或者 curve 赋值 $v \in \mathcal{V}$ 使得

$$\text{lct}^\psi(a_*(w)) = \frac{A(v) + v(\psi)}{v(a_*(w))}.$$

进一步地, 若 $\psi \notin \mathfrak{m}$, 则 v 可取为在某个局部坐标下为 monomial 赋值; 若 w 为 curve 赋值, 则 v 可取为 w 的逼近序列中的某个元素.

证明. 结合 引理 12.6, 12.7 即可得. Q.E.D.

- 如上我们称赋值 v 计算 (compute) 跳跃数 $\text{lct}^\psi(a_*(w))$.

引理 12.9. 令 $\psi \in R$, 以及 $I_\bullet$ 为 R 中的一个 graded sequence of ideals. 则存在某个赋值 $v \in \mathcal{V}$ 计算跳跃数 $\text{lct}^\psi(I_\bullet)$, 即

$$\text{lct}^\psi(I_\bullet) = \frac{A(v) + v(\psi)}{v(I_\bullet)},$$

且此时 v 亦计算 $\text{lct}^\psi(\mathbf{a}_\bullet(v))$.

证明. 参见 [2, Theorem 7.3, 7.8]. 实际上利用 $\mathcal{V}$ 紧性直接证明应该也并不困难.

定理 12.10. 令 $\psi \in R$, 以及 $I_\bullet$ 为 R 中的一个 graded sequence of ideals. 则存在某个 quasimonomial 赋值或 curve 赋值 $v \in \mathcal{V}$ 计算 $\text{lct}^\psi(I_\bullet)$.

证明. 结合推论 12.8, 引理 12.9 即可. Q.E.D.

进一步地: - 存在 monomial 赋值计算 $\text{lct}(I_\bullet)$; - 对于任意 $\phi \in \mathfrak{m}$, 存在 divisorial 赋值或者 curve 赋值计算 $\text{lct}^\phi(\phi)$. 当 ϕ 不可约时可以直接利用引理 12.6 得到, 可约时也可类似于其证明来得到.

定理 12.10 的高维推广即为著名的 Jonsson-Mustata 猜想, 目前只在 $\psi \notin \mathfrak{m}$ 时由许晨阳所证明. 定理 12.10 的成立实际上可以推出二维情形的 乘子理想强开性 的成立, 这也是 [1] 中证明类似结果的核心目的之一.

练习 12.11. 对任意 $v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}$ 为 quasimonomial 赋值, 证明存在理想 $\mathfrak{q}$ 以及 graded sequence $I_\bullet$, 使得 v 计算 $\text{lct}^\mathfrak{q}(I_\bullet)$. 进一步地, 证明存在正整数 N , 使得 $\{w \in \mathcal{V} \mid w \text{ 计算 } \text{lct}^{\mathfrak{m}^N}(\mathbf{a}_\bullet(v))\} = \{v\}$.

下一节我们介绍 [1] 中利用赋值树理论给出 lct 的 ACC 性质的二维情形的另证. 之后或许我们有可能介绍 [1] 中利用赋值树理论给出任意 R 中的整闭理想均可实现为某个乘子理想 $\mathcal{J}(I^c)$ 的另证 (注意此结论在更高维不再成立).

参考文献

- [1] Favre, C. and Jonsson, M. (2005). Valuations and multiplier ideals. *J. Amer. Math. Soc.* **18** 655–84.
- [2] Jonsson, M. and Mustařă, M. (2012). Valuations and asymptotic invariants for sequences of ideals. *Ann. inst. Fourier* **62** 2145–209.
- [3] Lazarsfeld, R. (2004). *Positivity in Algebraic Geometry II*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.