

赋值树理论简介 13

本文中依然记 $R = \mathbb{C}[[x, y]]$, 其极大理想 $\mathfrak{m} = (x, y)R$.

ACC 定理

对任意 $\psi \in R$, 简记 $c(\psi) = \text{lct}(\psi)$. 回忆 $c(\psi) = \inf_{v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}} A(v)/v(\psi)$. 本文介绍下面的结果在 [1] 文中对下面的结果利用赋值树理论给出的另证.

定理 13.1. 集合 $\mathbf{c} = \{c(\psi) \mid \psi \in \mathfrak{m}\}$ 满足 ACC (ascending chain condition), 即任意 $\mathbf{c}$ 中的递减序列均最终稳定.

实际上, 上面的 ACC 定理在任意维数都是成立的.

命题 13.2. 上述集合 $\mathbf{c}$ 的极限点集为 $\{0\} \cup \{1/a \mid a \in \mathbb{N}\}$.

赋值树理论的结果

对任意 $\psi \in \mathfrak{m}$, 令 $\lambda(\psi) := c(\psi)^{-1}$ 为 ψ 的 **Arnold 重数 (Arnold multiplicity)**, 等价于我们需要证 $\lambda := \{\lambda(\psi) \mid \psi \in \mathfrak{m}\}$ 满足 DCC (descending chain condition), 且极限点集为 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. 对任意 $v \in \mathcal{V}$, 令 $\chi_\psi(v) = v(\psi)/A(v)$, 则 $\lambda(\psi) = \sup_{v \in \mathcal{V}_{\text{qm}}} \chi_\psi(v)$.

对于 ψ , 令 $\psi = \prod \phi_k^{a_k}$ 为将其分解为不可约因子的乘积. 对每个 k , 定义赋值

$$v_k := \max\{v \in \mathcal{V} \mid m(v) = 1, v \leq v_{\phi_k}\}.$$

则 v_k 为 v_{ϕ_k} 或者某个 divisorial 赋值. 记 $\alpha_k = \alpha(v_k)$, $b_k = b(v_k)$, $v_{kl} = v_k \wedge v_l$ 以及 $\alpha_{kl} = \alpha(v_{kl})$.

引理 13.3. 对所有 k, l , 有 $\alpha_{kl}m_k$ 与 $\alpha_{kl}m_l$ 二者至少有一个为整数, 其中 $m_k = m(\phi_k)$.

证明. 由命题 10.2, 知 $b_k\alpha_k \in \mathbb{N}$ (若 $\alpha_k < \infty$), 且 m_k 被 b_k 整除, 因此 $m_k\alpha_k \in \mathbb{N}$. 由此知若 $v_{kl} = v_k$ 或 v_l , 则该引理成立. 否则我们有 $v_{kl} < v_k$ 且 $v_{kl} < v_l$. 那么我们由 $m(v_k) = m(v_l) = 1$ 即可知 $b(v_{kl}) = 1$, 此时再根据 $b_{kl}\alpha_{kl} \in \mathbb{N}$ 知也有 $\alpha_{kl} \in \mathbb{N}$ 成立. Q.E.D.

引理 13.4. 函数 χ_ψ 的上确界在某个 v_{kl} 处取得.

证明. 由于

$$\chi_\psi(v) = \frac{v(\psi)}{A(v)} = \frac{\sum a_k v(\phi_k)}{A(v)},$$

类似于引理 12.6 的证明, 我们可以得到 χ_ψ 的上确界必在 $v_{\mathfrak{m}}$ 或者某个 v_{kl} 处取得 (具体细节不再赘述). 如果某个 $v_{kl} = v_{\mathfrak{m}}$, 那么引理成立. 否则我们设 $v_{kl} > v_{\mathfrak{m}}$ 对所有 k, l 成立. 这意味着 $w := \wedge_{k,l} v_{kl} > v_{\mathfrak{m}}$. 此时类似于引理 12.6 的证明会发现在 $[v_{\mathfrak{m}}, w)$ 上有 $d\chi_\psi/d\alpha > 0$, 即 χ_ψ 不会在 $v_{\mathfrak{m}}$ 处达到上确界. Q.E.D.

引理 13.5. 对任意 k, l , 我们有 $v_{kl}(\psi) \in \frac{1}{m_k}\mathbb{N}^* \cup \frac{1}{m_l}\mathbb{N}^*$.

证明. 固定某个 i . - 若 $v_{\phi_i} \geq v_{kl}$, 则 $v_{kl}(\phi_i) = \alpha_{kl}m_i$, 由引理 13.3, 它属于 $\frac{1}{m_k}\mathbb{N}^* \cup \frac{1}{m_l}\mathbb{N}^*$. - 若 $v_{\phi_i} \not\geq v_{kl}$, 则 $v_{kl}(\phi_i) = v_{ik}(\phi_i)$. 此时根据引理 13.3 及其证明过程: 要么 $v_{ik} = v_i$ 且 $v_{kl} \in \mathbb{N}^*$; 要么 $v_{ik} < v_i$, $v_{ik} < v_{kl}$ 且 $\alpha_{ik} \in \mathbb{N}^*$, 由此亦有 $v_{kl}(\phi_i) \in \mathbb{N}^*$. 综上, $v_{kl}(\psi) = \sum a_i v_{kl}(\phi_i) \in \frac{1}{m_k}\mathbb{N}^* \cup \frac{1}{m_l}\mathbb{N}^*$. Q.E.D.

引理 13.6. 由引理 13.4 假设 $\lambda(\psi) = \chi_\psi(v_{kl})$. 令 $I = \{i : v_{\phi_i} \geq v_{kl}\}$ 并令 J 为 I 的补集. 则

$$\sum_{j \in J} a_j v_{kl}(\phi_j) \leq \sum_{i \in I} a_i m_i.$$

证明. 对任意 $t \in (\alpha_{kl} - \eta, \alpha_{kl})$, 其中 η 为很小的正实数, 我们有

$$\chi_\psi(v_{\phi_i, t}) = \frac{t(\sum_{i \in I} a_i m_i) + \sum_{j \in J} a_j v_{kl}(\phi_j)}{1 + t},$$

并且由于 χ_ψ 的上确界在 v_{kl} 处取到, 即 $\chi'(t) \geq 0$ 在该区间上成立, 从而得到欲证不等式. Q.E.D.

ACC 定理的证明

首先我们证明 定理 13.1, 为此我们只需证明对任意 $C > 0$, 集合 $\lambda \cap (0, C)$ 满足 DCC.

任取一列 $\psi_n \in \mathfrak{m}$ 满足 $\lambda(\psi_n)$ 递减并且均小于 C . 由

$$\lambda(\psi) = \sup_v \frac{v(\psi)}{A(v)} \geq \frac{m(\psi)}{2},$$

得 $m(\psi_n) \leq 2C$. 对任意 n , 我们如上引入记号 $\phi_k^n, \alpha_{kl}^n, I^n$ 以及 J^n . 后面为了简便也可能不带角标 n . 再令

$$\mathcal{N} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}^*, q \leq 2C \right\}.$$

另一方面, 由引理 13.4,

$$\begin{aligned} \lambda(\psi_n) &= \frac{\left(\sum_{i \in I} a_i m_i \right) \alpha_{kl} + \sum_{j \in J} a_j v_{kl}(\phi_j)}{1 + \alpha_{kl}} \\ &= \left(\sum_{i \in I} a_i m_i \right) - \frac{1}{1 + \alpha_{kl}} \left(\sum_{i \in J} a_i m_i - \sum_{j \in J} a_j v_{kl}(\phi_j) \right). \end{aligned}$$

注意到 $\sum_{i \in I} a_i m_i \leq m(\psi_n) \leq 2C$, 因此对于充分大的 n , 我们可以不妨假设 $\sum_{i \in I} a_i m_i$ 是常数, 记为 D . 另一方面, 由引理 13.5, $\sum_{j \in J} a_j v_{kl}(\phi_j)$ 总是属于离散集 $\mathcal{N}$ 中. 而由引理 13.6 知它又是被 D 作为上界所控制的, 因此我们也可以不妨假设它是常数. 因此,

$$\lambda(\psi_n) = D - \frac{E}{1 + \alpha_{kl}},$$

其中 E 是某个常数. 从而当 $\lambda(\psi_n)$ 递增的时候, 相应地有 α_{kl} 是递减的. 最后, 结合引理 13.3 知 $\alpha_{kl} \in \mathcal{N}$ 得到对于充分大的 n , 有 α_{kl} 是常数. 综上, 得证 λ 满足 DCC. Q.E.D.

下面计算 λ 的所有极限点. 假设 $\lambda(\psi_n) \rightarrow \lambda \in \lambda, \lambda \neq \infty$. 由 DCC 我们不妨假设 $\lambda(\psi_n)$ 是单调递增的. 同样由上, 我们可以得到 $\lambda(\psi_n) = D - E(1 + \alpha_{kl})^{-1}$ 对某两个常数 $D, E > 0$, 其中 D 是一个整数. 因此若使 $\lambda(\psi_n)$ 不最终稳定, 必须有 $\alpha_{kl} \rightarrow \infty$, 即 $\lambda = D \in \mathbb{N}$. 因此 λ 的极限点包含在 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中.

另一方面, 对任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 计算可得 $\lambda(y^m + x^n) = \frac{mn}{m+n}$, 这个集合的极限点包含了 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中所有的元素. 综上, 命题 13.2 得证. Q.E.D.

引理 13.7. 对任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 有 $\lambda(y^m + x^n) = \frac{mn}{m+n}$.

实际上对于这类多项式的 log canonical threshold 的计算有专门的 (Howald's) Newton polyhedron 的算法, 参见 [2, 9.3.C 节].

参考文献

- [1]. Favre, C. and Jonsson, M. (2005). Valuations and multiplier ideals. *J. Amer. Math. Soc.* **18** 655–84.
- [2]. Lazarsfeld, R. (2004). *Positivity in Algebraic Geometry II*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.