

赋值树理论简介 14

我们介绍利用 Puiseux 级数建立赋值树相关理论的方法, 但我们不会再仔细地给出所有中间结果的证明.

以下继续令 $R = \mathbb{C}[[x, y]]$, $\mathfrak{m} = (x, y)R$ 为 R 的一个极大理想.

Puiseux 级数

令 $k = \mathbb{C}((x))$ 为 $\mathbb{C}[[x]]$ 的分式域, 即关于变元 x 的形式 Laurent 级数 $\sum_{n \geq -N} c_n x^n$ 组成的域. 令 $\hat{k}$ 为 k 的代数闭包.

定理 14.1. (Newton-Puiseux 定理) $\hat{k}$ 中的元素由 (有限或无限的) **Puiseux 级数**:

$$\hat{\phi} = \sum_{j \geq 1} a_j x^{\hat{\beta}_j}, \quad a_j \in \mathbb{C}^*, \quad \hat{\beta}_{j+1} > \hat{\beta}_j \in \mathbb{Q} \quad (14.1)$$

构成, 其中有理数 $\hat{\beta}_j$ 具有有界分母 (denominator), 即存在某个整数 m 使得 $m\hat{\beta}_j \in \mathbb{Z}$ 对所有 j 成立.

证明. 记 $\mathbb{C}((x^*))$ 为所有 Puiseux 级数构成的域. 容易验证 $\mathbb{C}((x^*)) \subseteq \hat{k}$, 因此我们只需证明 $\mathbb{C}((x^*))$ 是代数闭的. 下面的证明参考的是 [1].

只需证明任意次数 $n > 1$ 的系数均位于 $\mathbb{C}((x^*))$ 中的首一多项式

$$P(x, T) = T^n + a_1(x)T^{n-1} + \cdots + a_n(x)$$

是可约的. 通过做变换 $T' = T + a_1(x)/n$, 我们不妨假设 $a_1(x) \equiv 0$. 对定理叙述中的 $\hat{\phi}$ 我们记 $\text{ord}(\hat{\phi}) = \hat{\beta}_1 \in \mathbb{Q}$. 令 $r_l = \text{ord } a_l(x)$ 并记 $r = \min\{r_l/l\}$. 由定义, 我们可以取充分大正整数 q 使得所有的 Puiseux 级数 $a_l(x)$ 可写作形式 $f_l(x^{1/q})$, 其中 $f_l(x) \in k = \mathbb{C}((x))$. 令 $r = p/q$, 其中 $p \in \mathbb{Z}$.

通过坐标变换 $x = w^q$, $T = U \cdot w^p$, 我们得到

$$P(x, T) = w^{np} \cdot Q(w, U),$$

其中

$$Q(w, U) = U^n + b_2(w)U^{n-2} + \cdots + b_n(w)$$

以及 $b_l(w) = a_l(w^q)w^{-lp}$. 由于 $\text{ord } b_l \in \mathbb{Z}$ 以及

$$\text{ord } b_l = q \cdot r_l - p \cdot l = ql(r_l/l - r) \geq 0,$$

知 $Q(w, U)$ 为系数在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中的多项式. 进一步地, 对至少某一个 l 有 $\text{ord } b_l = 0$, 即对这样的 l 有 $b_l(0) \neq 0$. 因此复多项式

$$Q(0, U) = U^n + b_2(0)U^{n-2} + \cdots + b_n(0) \neq (U - c)^n$$

对任意 $c \in \mathbb{C}$, 从而 $Q(0, U)$ 可以写作两个互素复多项式的乘积. 此时利用 Hensel 引理, 我们可以将 $Q(w, U)$ 写作系数在 $k = \mathbb{C}[[x]]$ 中的多项式的乘积 $Q_1(w, U) \cdot Q_2(w, U)$. 综上

$$P(x, T) = x^{nr} \cdot Q_1(x^{1/q}, x^{-r}T) \cdot Q_2(x^{1/q}, x^{-r}T),$$

即得证. Q.E.D.

实际上, 定理 14.1 有如下著名的推论, 其证明我们不再赘述.

定理 14.2. (Puisseux 定理) 若 $P(x, T) \in \mathbb{C}((x))[T]$ 为一个关于 T 的次数为 n 的首一不可约多项式, 则存在形式幂级数 $g(x) \in \mathbb{C}((x))$ 使得

$$P(x^n, T) = \prod_{i=0}^{n-1} (T - g(\xi_n^i x)),$$

这里 ξ_n 是一个 n 次本原单位根.

Puisseux 级数与赋值的延拓

现在我们给 $k = \mathbb{C}((x))$ 及其代数闭包 $\hat{k}$ (Puisseux 级数域) 上装备赋值 $v_\star$, 满足 $v_\star|_{\mathbb{C}^\times} = 0$ 以及 $v_\star(x) = 1$. 令 $\bar{k}$ 为 $\hat{k}$ 关于赋值 $v_\star$ 的完备化. 事实上, $\bar{k}$ 中的元素为满足 (14.1) 式的有限或无限级数, 并满足当级数为无限情形时有 $\hat{\beta}_j \rightarrow \infty$, 但是没有 denominator 上的限制.

赋值 $v_\star$ 自然地延拓到如上形式的级数上去: 我们有 $v(\hat{\phi}) = \hat{\beta}_1$.

定义

$$\hat{k}_+ = \{\hat{\phi} \in \hat{k} \mid v_\star(\hat{\phi}) > 0\},$$

即满足 $\hat{\beta}_1 > 0$ 的元素. 类似地, 我们定义 k_+ 和 $\bar{k}_+$.

固定 $y \in \mathfrak{m}$ 使得 (x, y) 是 $\mathbb{C}^2$ 中的局部形式坐标, 即 $v_x \wedge v_y = v_m$. 将 y 视为一个变量, 考虑环 $\bar{k}[[y]]$: 由具有 Puiseux 级数系数的形式幂级数组成.

我们将考虑那些赋值 $\hat{v} : \bar{k}[[y]] \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, 为 $\bar{k}$ 上的赋值 $v_\star$ 的延拓, 并满足 $\hat{v}(y) > 0$. 由于 $\bar{k}$ 是代数闭域, 实际上这样的赋值完全由其在线性多项式 $y - \hat{\psi}$, $\hat{\psi} \in \bar{k}$ 上的取值所决定.

命题 14.3. 任意如上的赋值 $\hat{v}$ 可以被一个数 $\hat{\beta} \in \overline{\mathbb{R}_+}$, 以及一个有限或无限的如 (4.1) 式的级数 $\hat{\phi}$ (没有 $\lim \hat{\beta}_j$ 的限制) 并满足 $\hat{\beta} > \hat{\beta}_j > 0$ 对所有 j 且 $\hat{\beta} = \lim \hat{\beta}_j$ 如果级数是无限的, 所唯一表示. 精确地说, 我们有

$$\hat{v}(y - \hat{\psi}) = \min\{\hat{\beta}, v_\star(\hat{\psi} - \hat{\phi})\}, \quad \forall \hat{\psi} \in \bar{k}. \quad (14.2)$$

反过来, 如果 $\hat{\phi}$ 及 $\hat{\beta}$ 满足如上这些条件, 则存在唯一的 $\bar{k}[[y]]$ 上的一个赋值 $\hat{v}$, 满足 (14.2) 式且是 $v_\star$ 的延拓.

我们不再证明这个结论. 实际上可以用 SKP 与 $\mathbb{C}[[x, y]]$ 上的一一对应来给出证明. 由 Puiseux 级数和赋值的对应也可以给出赋值的分类.

定义 14.4. 我们记 $\text{val}[\hat{\phi}; \hat{\beta}]$ 为命题 14.3 中由 $(\hat{\phi}, \hat{\beta})$ 所唯一决定的赋值 $\hat{v} : \bar{k}[[y]] \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$. 进一步地, 我们称 $\hat{v}$ 是

- (i) 点型 (**point type**) 如果 $\hat{\phi} \in \bar{k}$ 且 $\hat{\beta} = \infty$; 此时我们记 $\hat{v} = \hat{v}_{\hat{\phi}}$;
- (ii) 有限型 (**finite type**) 如果 $\hat{\phi} \in \hat{k}$ 且 $\hat{\beta} < \infty$;
- (iii) 有理的 (**rational**) 如果 $\hat{v}$ 是有限型并且 $\hat{\beta}$ 是有理数;
- (iv) 无理的 (**irrational**) 如果 $\hat{v}$ 是有限型并且 $\hat{\beta}$ 是无理数;
- (v) 特殊型 (**special type**) 如果 $\hat{\phi} \notin \bar{k}$.

- 如果 $\hat{v} = \text{val}[\hat{\phi}; \hat{\beta}]$ 是 point type 或者 special type, 可以证明

$$\hat{v}(y - \hat{\psi}) = v_{\star}(\hat{\psi} - \hat{\phi}), \quad \forall \hat{\psi} \in \bar{k}.$$

树结构与 Puiseux 参数化

令 $\hat{\mathcal{V}}_x$ 为那些在 $\bar{k}$ 上是 $v_{\star}$ 的延拓并满足 $\hat{v}(y) > 0$ 的赋值 $\hat{v} : \bar{k}[[y]] \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ 全体组成的集合. 我们在 $\hat{\mathcal{V}}_x$ 中加入赋值 $\hat{v}_{\star}$, 它由如下条件所定义: $\hat{v}_{\star}(y - \hat{\phi}) = 0$ 对所有满足 $v_{\star}(\hat{\phi}) \geq 0$ 的 $\hat{\phi} \in \bar{k}$ 成立.

$\hat{\mathcal{V}}_x$ 上有自然的偏序结构: $\hat{v} \leq \hat{w}$ 当且仅当其作为 $\bar{k}[[y]]$ 上的函数逐点有相应大小关系. 实际上, $\hat{v} \leq \hat{w}$ 当且仅当

$$\hat{v}(y - \hat{\psi}) \leq \hat{w}(y - \hat{\psi}), \quad \forall \hat{\psi} \in \bar{k}_+.$$

命题 14.5. 如上偏序 $\leq$ 给出 $\hat{\mathcal{V}}_x$ 上的一个完备 nonmetric tree structure, 其中 root 为 $\hat{v}_{\star}$. 其 ends 是 point type 和 special type 的赋值, 分支点是 rational 赋值, 正则点是 irrational 赋值.

若 $\hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}_x$, 定义 $\hat{v}$ 的 **Puiseux 参数 (Puiseux parameter)** 为

$$\hat{\beta}(\hat{v}) := \sup \{ \hat{v}(y - \hat{\psi}) \mid \hat{\psi} \in \bar{k} \}.$$

命题 14.6. 上述 Puiseux 参数定义了树 $\hat{\mathcal{V}}_x$ 的一个参数化 $\hat{\beta} : \hat{\mathcal{V}}_x \rightarrow [0, +\infty]$. 进一步地,

- (i) 若 $\hat{v}$ 为 rational, 则 $\hat{\beta}(\hat{v})$ 为有理数;
- (ii) 若 $\hat{v}$ 为 irrational, 则 $\hat{\beta}(\hat{v})$ 为无理数;
- (iii) 若 $\hat{v}$ 为 point type, 则 $\hat{\beta}(\hat{v}) = \infty$;
- (iv) 若 $\hat{v}$ 为 special type, 则 $\hat{\beta}(\hat{v}) \in (0, \infty]$.

- 若 $\hat{v} = \text{val}[\hat{\phi}; \hat{\beta}]$, 则实际上 $\hat{v}$ 正是 segment $[\hat{v}_{\star}, \hat{v}_{\hat{\phi}}]$ 上满足 $\hat{\beta}(\hat{v}) = \hat{\beta}$ 的那个点对应的赋值.

Galois 作用

令 $G := \text{Gal}(\hat{k}/k)$. 群 G 作用在 $\hat{k}$ 上, 对偶地可作用在 $\hat{\mathcal{V}}_x$ 中的赋值上.

Galois 群

实际上, $\text{Gal}(\hat{k}/k)$ 是一个投射极限 (即逆向极限):

- 对任意 $m \geq 1$, 令 $k_m = \mathbb{C}((x^{1/m}))$. 映射 $x^{1/m} \mapsto (x^{1/mn})^n \in k_{mn}$ 定义了一个域扩张 $k_m \rightarrow k_{mn}$, 由此 k_m 形成一个内射系统, 其内射极限 (正向极限) 为 $\hat{k}$;

- 每个 Galois 群 $G_m = \text{Gal}(k_m/k)$ 同构于 $\{\omega \in \mathbb{C} : \omega^m = 1\}$;
- 元素 $\omega \in G_m$ 在 $k_m = \mathbb{C}((x^{1/m}))$ 上的作用记为 ω^* , 满足 $\omega^*(x^{1/m}) = \omega x^{1/m}$;
- 相应地, $\omega \mapsto \omega^n$ 给出从 G_{mn} 到 G_m 的群同态;
- 由此, 群 G_m 形成一个投射系统, 其投射极限为 Galois 群 $G = \text{Gal}(\hat{k}/k)$.

若 $\omega \in G$, 记 ω_m 为其在 G_m 中的像. 则对任意单项式 $x^\beta \in \hat{k}$, 我们有 ω 在 x^β 上的作用为: 记 $\beta = p/q$, 其中 $\gcd(p, q) = 1$, 再取 m 使得 $q \mid m$, 记 $m = qr$. 则

$$\omega^*(x^\beta) = \omega_m^{pr} x^\beta.$$

可以验证其与 m 的选取无关. 进一步地, 由此可以给出 G 在 $\bar{k}$ 上的自然作用.

显然有:

- $v_\star(\omega^*\hat{\phi}) = v_\star(\hat{\phi})$ 以及 $m(\omega^*\hat{\phi}) = m(\hat{\phi})$ 对任意 $\hat{\phi} \in \bar{k}$ 成立;
- 若 $m(\hat{\phi}) = 1$, 即 $\hat{\phi} \in k$, 则 $\omega^*\hat{\phi} = \hat{\phi}$.

将上述 Galois 群作用延拓到 $\bar{k}[y]$ 上: 令 $\omega^*y = y$, 对任意 $\omega \in G$.

则对任意 ω , 有 ω^* 在 $k[[y]] \supset R$ 上的限制是恒等作用.

在 $\hat{\mathcal{V}}_x$ 上的作用

参考文献

- [1] Nowak, K. J. (2000). Some elementary proofs of Puiseux's theorems. *Univ. Iagel. Acta Math.* 279–82.
- [2] Favre, C. and Jonsson, M. (2004). The Valuation Tree. vol 1853 Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.